

# 金先物市場のマイクロストラクチャー —ティック・データを利用した実証分析—

森 保 洋<sup>1</sup>

## 要 旨

1. はじめに
2. データ
3. 価格変動と取引時間間隔のモデル化
4. 推定結果
5. おわりに

## 要 旨

本稿の目的は我が国商品先物市場において、取引が活発に行われている商品の一つである金先物に着目し、その日中における価格変動と取引時間間隔の関係をマーケット・マイクロストラクチャーの観点から実証的に分析することである。

分析の結果から、価格変化と取引時間間隔には日中季節性が存在することが明らかになった。価格変化は午前の取引開始直後と午後の取引終了直前に生じやすく、この時間帯のボラティリティが高いことが示された。また、これらの時間帯では取引時間間隔も他の時間帯に比べ短く、活発に取引がなされていることが明らかになった。

また、Russel and Engle(2005)が提案する Autoregressive Conditional Multinomial-Autoregressive Conditional Duration モデルを利用した分析の結果、取引時間間隔は過去の取引時間間隔に強く影響を受けることが示された。また、残存期間が長ければ取引時間間隔も長くなることが明らかになった。

さらに、取引時間間隔と、価格変化が生じる確率については、取引時間間隔が長いと価格変化が起きる確率が低くなること示された。

取引時間帯が価格変化確率に与える影響の程度を検証したところ、1回の取引において、価格が上昇しやすい（あるいは下落しやすい）時間帯というものは存在しないことが示された。

キーワード：金先物、マーケット・マイクロストラクチャー、ACM-ACD モデル、ティック  
・データ

---

<sup>1</sup> 本研究は日本商品先物振興協会からの助成により行われました。ここに記して感謝します。

## 1. はじめに

昨今の国際商品価格の高騰により、価格変動リスクをヘッジする手段としての商品先物市場が実需家から以前に増して注目されている。さらに、株式市場との連動性が低い国際商品先物市場はオルタネイティブ投資の対象としても有力視されている。このような商品先物市場に関するニーズが高まるのに呼応するかたちで、2004年に商品取引所法が改正され、2005年5月に施行された。この法改正によって、アウトハウス型クリアリングハウスの導入や、委託者財産の保全制度の拡充など、商品先物取引システムの信頼性向上が期待されている。

商品先物市場が多くの投資家から利用されるためには、法改正による取引システムの整備もさることながら、市場が効率的なものである必要があるだろう。市場の効率性を含めた、我が国の商品先物市場に関する実証研究には以下のものがあげられる。

羽森・羽森（2000）は東京穀物商品取引所とシカゴ商品取引所で取引されるトウモロコシと大豆の日次データを用い、GARCHモデル、GJRモデルの推定を行うことによって日次収益率のボラティリティの変動特性を分析している。分析の結果、全ての分析系列においてGJRモデルにおけるボラティリティの非対称項は有意ではなく、1期前の価格変動の符号は当期のボラティリティの増加に違いをもたらさないことを示した。

飯原ほか（2000）はSchwartz（1997）のモデルを東工取とニューヨーク商品取引所で取引される金先物の日次価格データに適用している。このモデルではコンビニエンス・イールドが直接観測不可能な時変パラメータとして取り扱われ、カルマン・フィルタを利用して推定される。推定結果より、コンビニエンス・イールドは時間とともに変化するものと考えられること、日米間の市場構造は異なるにもかかわらず、両市場における金先物の価格変動特性は似通っていることを示した。

渡部・大森（2000）は価格変化率と取引高を同時に説明する2変量分布混合モデルをMarkov Chain Monte Carlo法を用いてベイズ統計学のアプローチで推定している。分析対象は東工取で取引されている金、銀、白金、綿糸40単および大阪繊維取引所上場の毛糸の先物日次データである。分析の結果から、2変量分布混合モデルで価格と出来高の両者の変動を説明できるのは毛糸だけであることを示した。

以上の先行研究が、日次データを利用した分析であったのに対し、芹田ほか（2005）は日中のすべての取引を記録したデータ、いわゆるティック・データを利用した分析を行っている。様々な取引関連変数について、その日中変動パターンを検証した結果、時間帯別の出来高、約定総代金についてはいわゆるW字型を、約定件数とボラティリティはU字型を示していることを明らかにした。

このように、我が国の商品先物市場に関する実証分析は蓄積されつつあるものの、ティック・データを利用した研究は緒に就いたばかりである。よりよい取引制度を設計するためには、流動性の測定など、ティック・データを利用した実証分析の蓄積が不可欠であると考えられる。

以上の問題意識から、本稿では我が国商品先物市場において、取引が活発に行われている

商品の一つである金先物に着目し、その日中における価格変動と取引時間間隔の関係をマーケット・マイクロストラクチャーの観点から実証的に分析する。

本稿は以下のように構成される。第2節では本分析で利用するデータ・セットの作成方法と、データ・セットを用いた予備的な分析が行われる。第3節では本稿で推定されるモデルについて述べる。推定結果とそのインプリケーションは第4節で論じられる。最後に第5節で本稿の結論の今後の課題を述べる。

## 2. データ

### 2. 1 データ・セットの作成

本稿では東京工業品取引所で取引される金先物のティック・データを利用して分析を行う。分析期間は2003年1月7日から2003年3月31日の3ヶ月間とする。金先物は各営業日に6限月が上場されており、これらが取引時間中に異なった価格で取引されている。本稿では各営業日で最も取引量が多かった限月のティック・データを抽出し、それらをつなぎ合わせることによって時系列データを作成する<sup>2</sup>。

次に作成したデータの中から、値幅制限に達する価格変動が生じた営業日のデータを削除する。これは値幅制限に達した価格は市場の均衡価格を表していないと考えるからである。具体的には2月6日、12日、13日、および3月14日、17日の5営業日のデータを削除する。

金先物の取引時間は午前9時から午前11時と午後12時30分から午後3時30分であるが、データにはこれらの時間帯以外のタイムスタンプが記されているものが散見された。このような取引時間帯外のデータは異常なものと見なし削除する。さらに、午前と午後の取引の最初と最後で行われる板寄せによって得られるデータについても削除する。これは、ザラバでの価格形成と異なる性質を持つ可能性があるからである。

また、同一時刻に同一の価格で約定されたデータについては、1つの取引としてデータを併合する。これは、第3.4節で行う取引時間間隔の分析において、取引時間間隔が0のデータを用いてモデルを推定すると、不都合が生じる可能性があるからである。

以上の方法で分析データを作成した結果、97617レコードがデータ・セットに含まれた。次項ではこのデータ・セットを利用して予備的な分析を行う。

### 2. 2 予備的分析

図1は日中の1回の取引における価格変化の分布を表したヒストグラムである。図から明らかかなように全取引の約41%は価格変化を伴わない取引である。価格変化が生じる場合でも、その価格変化幅は呼び値の最小単位である1円である場合がほとんどであり、1回の取引で

---

<sup>2</sup> 芹田ほか(2005)では、各営業日において残存期間が最も短いものから順に並べ、「番限1」、…、「番限6」とした。これらを同じ番限毎につなぎ合わせることによって、6つの系列を作成し、各系列についての分析を行っている。本稿で作成したデータ系列は、芹田ほか(2005)でいうところの「番限6」に対応するものである。

2円以上の価格変化が生じるのは0.3%と極めて稀である。また、価格変化の分布はほぼ対称である。

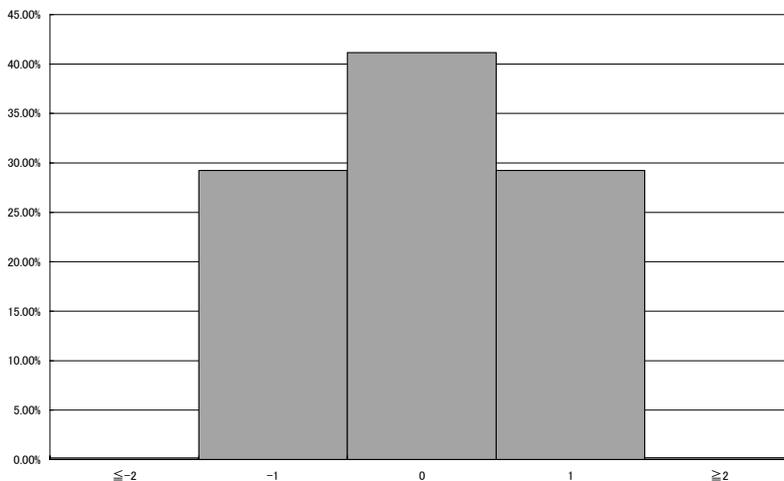


図 1 : 日中価格変化のヒストグラム

2円以上の価格変化がほとんどなかったため、 $i$  番目の取引における価格変化状態を表すベクトル  $\mathbf{x}_i$  を

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2})' = \begin{cases} (1, 0)' & \text{if } y_i < 0 \\ (0, 0)' & \text{if } y_i = 0 \\ (0, 1)' & \text{if } y_i > 0 \end{cases} \quad (1)$$

と定義する。ここで、 $y_i$  は  $i$  番目の取引における価格変化である。

図 2 は  $x_{i1}, x_{i2}$  のそれぞれのコレログラムと、両者間の相互相関係数を示している。1 次の自己相関係数をみると、 $x_{i1}, x_{i2}$  ともに有意に負であるので、1 回前の取引によって価格上昇（下落）が生じれば、次の取引では価格が下落（上昇）するか、価格変化がない場合が多いことを意味している。また、相互相関係数をみると、± 1 次のラグで有意に正の値をとっている。このことから、1 回前の取引により価格上昇（低下）が起きると、次の取引で価格低下（上昇）が起きる傾向があることを意味している。これは、いわゆるビッド・アスク・バウンス現象を捉えたものといえよう。2 次のラグは自己相関係数、相互相関係数とも有意であるが、その係数の絶対値は 1 次のそれに比べて非常に小さい。また、3 次以降のラグではほとんどの係数について有意ではないことがわかる。

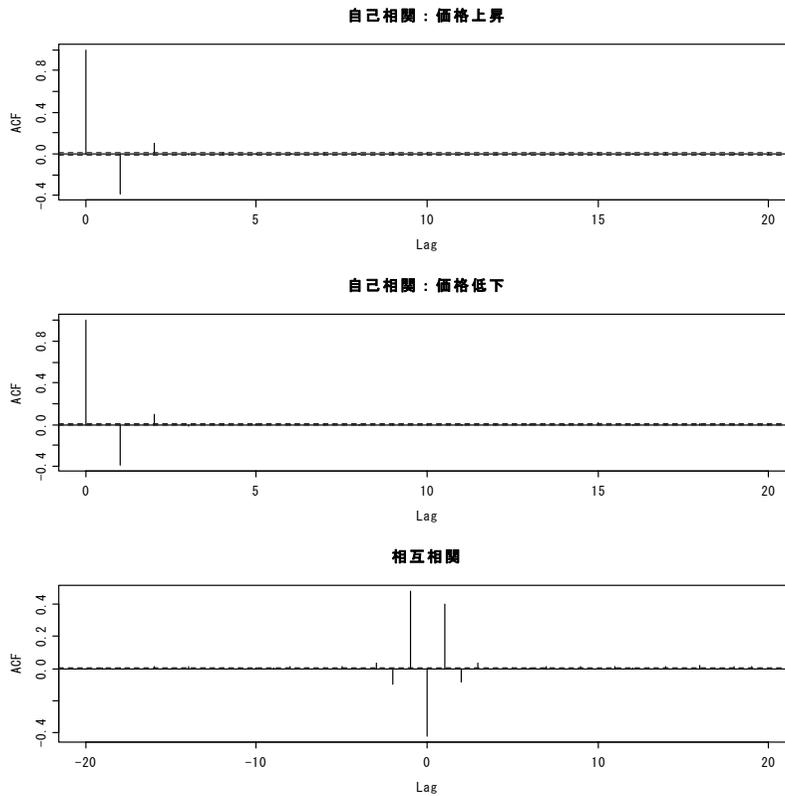
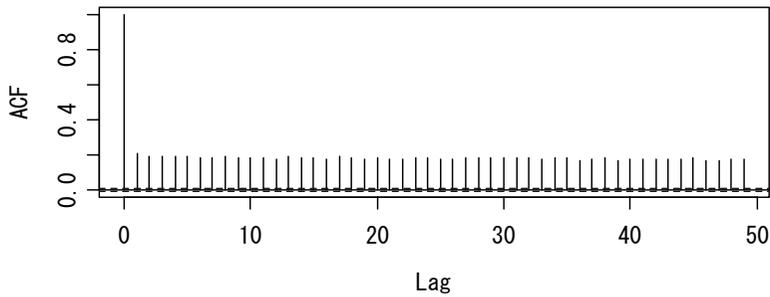


図 2：価格変化状態の自己相関と相互相関

次に、取引時間間隔の時系列特性を分析する。図 3 (a)は取引時間間隔のコレログラムである。自己相関係数は1次のラグで0.2程度の値をとり、ラグの次数が増えるに従って、非常に緩やかに減少している。これより、取引時間間隔は長期間にわたり過去の影響を受けることがわかる。また、図 3 (b)は第 2. 3節で後述される日中季節性調整済み取引時間間隔のコレログラムである。日中季節性を調整しても、取引時間間隔の過去への依存性はほとんど変化がないことがわかる。

(a) 取引時間間隔



(b) 日中季節調整済み取引時間間隔

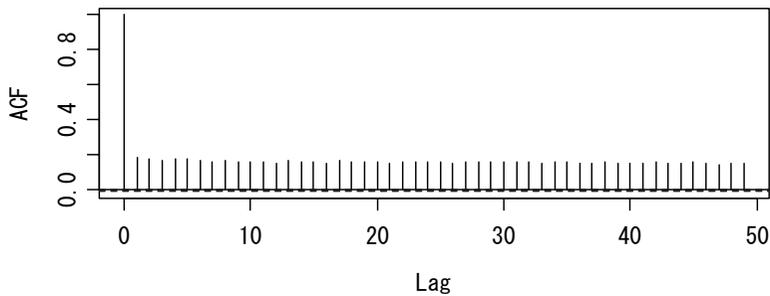


図3：取引時間間隔のコレログラム

### 2.3 日中季節性の検証

ティック・データを用いた株式市場に関する先行研究では、収益率のボラティリティや取引回数などに日中季節性が観察されている。例えば、森保・須齋（2004）は大阪証券取引所とシンガポール取引所に上場されている日経225先物について、1分あたりの取引回数が前場と後場の取引開始直後と取引終了直前に増加することを示している。また、前述のように我が国金先物市場については、芹田ほか（2005）が出来高、約定総代金、約定件数がいわゆるW字型の日中季節性を、ボラティリティがU字型の日中季節性を示すことを明らかにしている。

ここでは、価格変化と取引時間間隔の日中季節性についての検証を行う。

表1は(1)式の $x_{1t}$ 、 $x_{2t}$ をそれぞれ被説明変数とし、取引時間帯ダミー $d_{it}$ を説明変数とした回帰分析、すなわち

$$x_{ij} = c + \sum_{t=1}^9 \delta_{ij} d_{it} + \eta_{ij} \quad (j=1,2) \quad (2)$$

を推定した結果である。ここで、 $d_{it}$  は  $i$  番目の取引が第  $t+1$  時間帯に発生していれば 1、そうでなければ 0 をとるダミー変数である。取引時間帯は、日中の営業時間を取引開始から 30 分ごとに区切り、10 個の営業時間帯を作成し利用した。また、 $\eta_{ij}$  は正規分布に従う誤差項である。

被説明変数が  $x_1, x_2$  の場合ともに、推定された回帰係数はすべて負の値をとっている。これは、午前の取引開始直後の 30 分間に比べ、他の時間帯は価格上昇ないしは価格下落が生じる可能性が低いことを意味している。言い換えれば、午前の取引開始直後の 30 分に比べ、他の時間帯のボラティリティが低いということである。時間帯別の回帰係数をグラフ化したものが図 4 である。この図から午前の取引開始直後 30 分間と、午後の取引終了直前 30 分間のボラティリティが高いことがわかる。また、午前の取引終了前 30 分間と、午後の取引開始直後 30 分間もややボラティリティが高い。これは芹田ほか (2005) の結果と整合的である。

表 1 : 価格変化の日中季節性

	$x_1$		$x_2$	
	係数	標準誤差	係数	標準誤差
$c$	0.3165	0.0045	0.3200	0.0045
$\delta_1$	-0.0185	0.0061	-0.0215	0.0061
$\delta_2$	-0.0274	0.0063	-0.0316	0.0063
$\delta_3$	-0.0237	0.0064	-0.0299	0.0064
$\delta_4$	-0.0242	0.0071	-0.0232	0.0071
$\delta_5$	-0.0290	0.0066	-0.0331	0.0066
$\delta_6$	-0.0274	0.0067	-0.0305	0.0067
$\delta_7$	-0.0340	0.0067	-0.0382	0.0067
$\delta_8$	-0.0350	0.0067	-0.0393	0.0067
$\delta_9$	-0.0128	0.0061	-0.0165	0.0061

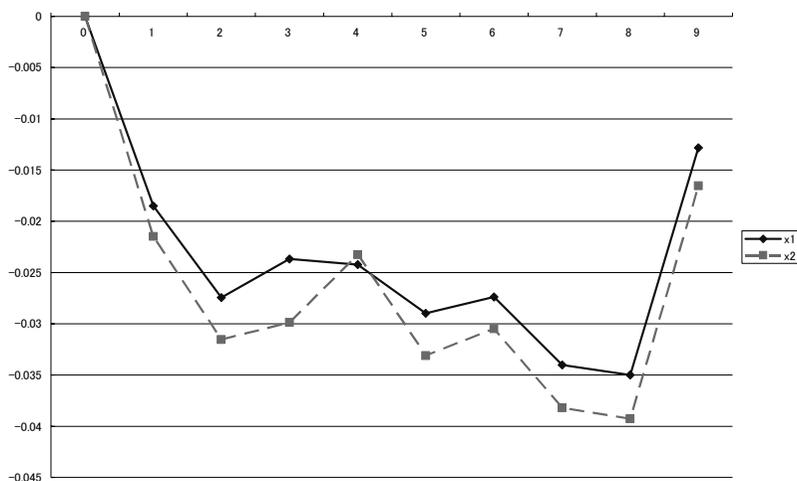


図4：価格変化の日中変動の推移

図5は取引時間間隔を平滑化したものをプロットしたものである<sup>3</sup>。横軸は取引開始時間である午前9時を基準とし、取引開始から経過した時間を秒単位で表している。縦軸は取引時間間隔(秒)である<sup>4</sup>。

この図より日中の取引時間間隔は逆U字型をしていることがわかる。すなわち、午前の取引開始直後に最も取引時間間隔が短く、午後1時30分～2時近辺まで取引時間間隔は長くなっていく、そして午後の取引終了に向けて再び取引時間間隔が短くなっていることがわかる。言い換えれば、午前の取引開始直後と午後の取引終了直前に取引が非常に活発である一方、それ以外の時間帯、特に午後1時30分～2時近辺は相対的に取引が少ないことがわかる。

分布混合仮説 (Clark (1973)) によれば、単位時間あたりの取引回数が増えれば、ボラティリティは増大する。この仮説が正しければ、図5は取引開始時間直後と取引終了時間直前にボラティリティがほかの時間帯より高いことを意味する。このことは、芹田ほか (2005) の分析結果と整合的である。

Engle and Russell (1998)、Russell and Engle (2005) に倣い、取引時間間隔は確定的な日中季節性とそれ以外の部分に分割できるものとし、以下の分析では日中季節性を調整した取引時間間

<sup>3</sup> 平滑化のアルゴリズムは Friedman (1984) の手法を利用する。実際の平滑化には統計解析ソフトウェア R の `supsmu` 関数を利用する。

<sup>4</sup> 図の中央付近で平滑化曲線が途切れているのは、午後の取引開始時刻である12時30分から12時40分までの間にほとんど取引が行われていないからである。これは、東工取の取引ルールに起因する。東工取では午前と午後の取引開始直後に一斉に6限月の取引を開始するわけではなく、残存期間が短いものから順次2分ごとに取引が開始される。本稿におけるデータ・セットは大部分最も残存期間が長い限月のものから構成されているため、ほとんどの営業日において午後の取引開始時刻は12時40分になっているのである。同様に9時から9時10分の間も平滑化曲線が存在しないことに注意されたい。

隔のモデル化を行う。日中季節性の調整は

$$\hat{\tau}_i = \frac{\tau_i}{\varphi(t_i)} \quad (3)$$

で行われる。ここで、 $\tau_i$  は  $i$  番目の取引における取引時間間隔、 $\varphi(t_i)$  は  $i$  番目の取引が発生した時間における取引時間間隔の平滑値である。

以下では特に明示しない限り「取引時間間隔」を「日中季節性調整済み取引時間間隔」の意味で利用することにする。

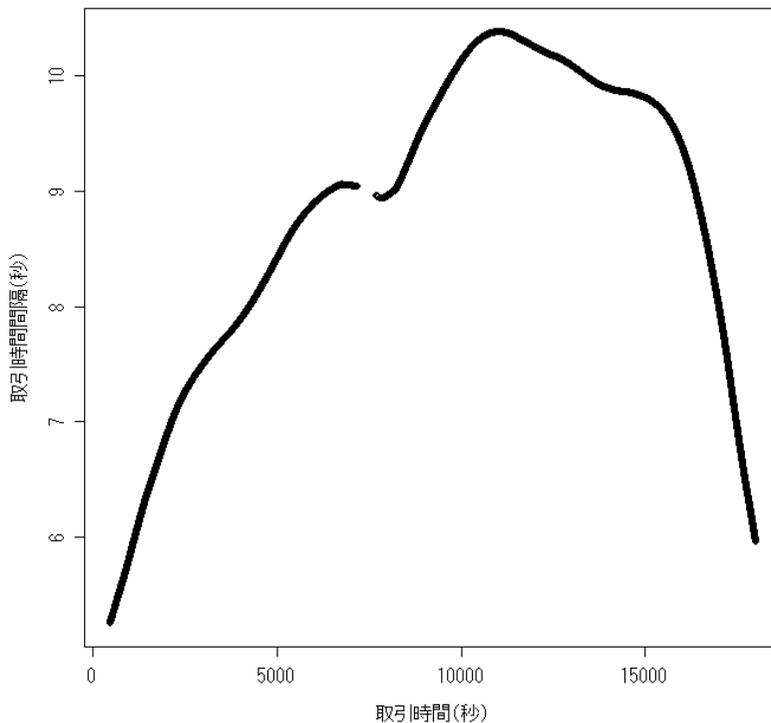


図5：取引時間間隔の平滑化

### 3. 価格変動と取引時間間隔のモデル化

本稿では、日中の取引における価格変化と取引時間間隔の関係を検証するために Autoregressive Conditional Multinomial-Autoregressive Conditional Duration モデル（以下 ACM-ACD モデルと略す）(Russell and Engle (2005)) を利用する。このモデルでは取引時間帯中の  $i$  番目の取引によって生じる価格変化を  $y_i$ 、 $i-1$  番目の取引と  $i$  番目の取引の時間間隔を  $\tau_i$

とし、これらの過去の条件付き同時密度関数  $f(y_i, \tau_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i-1)})$  を定式化する。ここで、 $\mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i-1)}$  はそれぞれ  $i-1$  期以前の価格変化と取引時間間隔に関する情報である。この同時密度関数は

$$f(y_i, \tau_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i-1)}) = g(y_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i)}) q(\tau_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i-1)}) \quad (4)$$

と、2つの条件付き密度関数の積に分解できる。 $q(\tau_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i-1)})$  は過去の条件付きの取引時間間隔に関する密度関数であり、 $g(y_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i)})$  は過去の価格変化と取引時間間隔に関する情報および今期の取引時間間隔の情報が与えられた場合の価格変化に関する密度関数である。

$q(\tau_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i-1)})$  のモデル化の試みは Autoregressive Conditional Duration (以下 ACD と略す) モデル (Engle and Russell (1998)) をはじめとして、Nonlinear ACD モデル (Zhang et al (2001))、Log-ACD モデル (Bauwens and Giot (2000)) などで行われている。ACM-ACD モデルでは、これらの成果を援用し  $q(\tau_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i-1)})$  を定式化する。さらに、1回の取引において、価格変化が生じない確率に対するある価格変化が生じる確率の比の対数値を定式化することによって、価格変化の分布  $g(y_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i)})$  を導出する。以下では本稿で推定する  $q(\tau_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i-1)})$  および  $g(y_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i)})$  の定式化について述べる。

### 3. 1 ACD モデル

ACD モデルでは、 $i$  番目の取引時刻と  $i-1$  番目の取引時刻との差 (取引時間間隔)  $\tau_i$  を

$$\tau_i = \psi_i \varepsilon_i \quad (5)$$

と定式化する。ここで、 $\varepsilon_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) は独立かつ同一な分布にしたがひ、非負値をとる平均 1 の確率変数である。 $\psi_i$  は過去の情報によって定式化される変数である。本稿ではパラメータの推定が他の ACD モデルに比べ容易な Log-ACD ( $u, w$ ) モデルを採用する。すなわち、

$$\ln(\psi_i) = \omega + \sum_{j=1}^u \alpha_j \varepsilon_{i-j} + \sum_{j=1}^w \beta_j \ln(\psi_{i-j}) + \sum_{j=1}^k \rho_j z_{i,j} \quad (6)$$

と定式化する。ここで、 $z_{i,j}$  は外生変数、 $\rho_j$  は対応するパラメータである。 $\tau_i$  の過去の条件付き平均は  $\psi_i$  となるので、(6)式は条件付き平均の対数値のダイナミクスを定式化していることがわかる。

ここで、 $\varepsilon_i$  がしたがう分布を特定すれば、最尤推定が可能になる。 $\varepsilon_i$  がしたがう分布の候補としては、指数分布やガンマ分布、ワイブル分布などが考えられるが、本稿では  $\varepsilon_i$  が平均 1 の指数分布にしたがうと仮定して推定を行う。これは、仮に  $\varepsilon_i$  が指数分布以外の分布にしたがっていたとしても、 $\varepsilon_i$  が指数分布に仮定して推定すれば推定されるパラメータは一致性を持つことが知られているからである。この場合、ACD モデルの対数尤度関数は

$$\ln L_{ACD} = -\sum_{i=1}^N \ln \psi_i + \frac{\tau_i}{\psi_i} \quad (7)$$

となる。

### 3. 2 ACM-ACD モデル

ACM モデルは離散的な状態遷移を定式化するモデルの一種である。株式や為替、商品先物などの金融商品の価格変化は連続的なものとしてモデル化される場合が多いが、現実の取引では、価格変化は必ず呼び値の整数倍となり、離散的なものである。さらに、図 1 から明らかなように、金先物のような取引が活発に行われる商品においては、1 回の取引における価格変化のパターンは、価格変化が 0 ないしは呼び値の  $\pm 1 \sim 2$  倍程度と、数種類に限定される。したがって、ACM モデルは金融商品の日中価格変動をモデル化するのに適したモデルの一つと考えられる。

起こりうる価格変化の数を  $k$  とし、 $\mathbf{x}_i$  を  $i$  番目の取引における状態を表す  $(k-1)$  次の列ベクトルとする。ここで、 $\mathbf{x}_i$  の第  $j (= 1, \dots, k-1)$  成分は  $i$  番目の取引において  $j$  番目の状態が実現する時 1 をとり、それ以外の場合には 0 をとるものとする。 $k$  番目の状態が実現されている場合は、 $\mathbf{x}_i$  がゼロベクトルになる。

また、 $\boldsymbol{\pi}_i$  を  $i$  番目の取引における状態が  $j$  となる過去の条件付きの確率を表す  $(k-1)$  次の列ベクトルとする。すなわち、 $\boldsymbol{\pi}_i$  の第  $j$  成分は、 $i$  番目の取引における状態が  $j$  となる確率を表し、 $k$  番目の状態が実現する条件付き確率はであらわされる。ここで、 $\mathbf{1}$  は成分が全て 1 の  $(k-1)$  次の列ベクトルである。

ACM モデルは条件付き確率ベクトル  $\boldsymbol{\pi}_i$  を直接定式化するのではなく、 $j$  番目の状態と  $k$  番目の状態が起きる確率比の対数値を定式化する。すなわち、ACM( $p, q$ ) モデルは

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\pi}_i) = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j (\mathbf{x}_{i-j} - \boldsymbol{\pi}_{i-j}) + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}_j \mathbf{h}(\boldsymbol{\pi}_{i-j}) + \boldsymbol{\chi} \mathbf{z}_i \quad (8)$$

と定式化される。ここで、 $\mathbf{h}(\boldsymbol{\pi}_i)$  はロジスティック関数の逆関数であり、 $\mathbf{A}_j$  は  $(k-1)$  次の正方行列、 $\mathbf{B}_j$  は  $(k-1)$  次の対角行列である。また、 $\mathbf{c}$  は定数項を表す  $(k-1)$  次の列ベクトル、 $\mathbf{z}_i$  は外生変数を表す  $r$  次の列ベクトルであり、 $\boldsymbol{\chi}$  は対応するパラメータを表す  $(k-1) \times r$  行列である。

(8)式から 1 番目から  $(k-1)$  番目の状態が実現する条件付き確率は

$$\pi_i = \exp \left[ \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j (\mathbf{x}_{i-j} - \pi_{i-j}) + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}_j \mathbf{h}(\pi_{i-j}) + \chi \mathbf{z}_i \right] \times \left( 1 + t' \exp \left[ \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j (\mathbf{x}_{i-j} - \pi_{i-j}) + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}_j \mathbf{h}(\pi_{i-j}) + \chi \mathbf{z}_i \right] \right)^{-1} \quad (9)$$

で表現される。これより、ACM モデルの対数尤度関数  $\ln L_{ACM}$  は

$$\ln L_{ACM} = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i' \ln \pi_i' \quad (10)$$

とかける。ここで、 $\mathbf{x}_i' = (\mathbf{x}_i, 1 - t' \mathbf{x}_i)$ 、 $\pi_i' = (\pi_i, 1 - t' \pi_i)$  である。

サンプルのサイズを  $N$  としたとき、価格変化と取引時間間隔の同時密度関数  $f(y_1, \dots, y_N, \tau_1, \dots, \tau_N)$  は(4)式と予測誤差の分解から、

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_N, \tau_1, \dots, \tau_N) &= \prod_{i=1}^N f(y_i, \tau_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i-1)}) \\ &= \prod_{i=1}^N g(y_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i)}) q(\tau_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i-1)}) \end{aligned} \quad (11)$$

と表される。したがって、ACM-ACD モデルの対数尤度関数  $\ln L_{ACM-ACD}$  は、

$$\begin{aligned} \ln L_{ACM-ACD} &= \sum_{i=1}^N \ln g(y_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i)}) + \sum_{i=1}^N \ln q(\tau_i | \mathbf{y}^{(i-1)}, \tau^{(i-1)}) \\ &= \ln L_{ACM} + \ln L_{ACD} \end{aligned} \quad (12)$$

となり、ACM モデルと ACD モデルの対数尤度関数の和として表現できる。両者の対数尤度関数が共通に依存するパラメータは存在しないので、ACM-ACD モデルの推定は、ACM モデルと ACD モデルの推定を独立に行うことによっても実現することができる。

## 4. 推定結果

本節では ACM-ACD モデルを金先物ティック・データを使って推定した結果と、その結果から導かれるインプリケーションについて述べる。

### 4. 1 ACM-ACD モデルの推定

表 2 は ACM-ACD モデル

ACM:

$$\mathbf{h}(\pi_i) = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{A}_j (\mathbf{x}_{i-j} - \pi_{i-j}) + \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_j \mathbf{h}(\pi_{i-j}) + \chi \begin{pmatrix} \ln \tau_i \\ \ln \tau_{i-1} \\ \ln \tau_{i-2} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_9 \end{pmatrix} \quad (13)$$

ACD:

$$\begin{aligned} \tau_i &= \psi_i \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. \exp(1) \\ \ln(\psi_i) &= \omega + \sum_{j=1}^2 \alpha_j \varepsilon_{i-j} + \sum_{j=1}^2 \beta_j \ln(\psi_{i-j}) + \sum_{j=1}^2 \rho_j y_{i-j} + \xi z_i \end{aligned} \quad (14)$$

を推定した結果である。ここで、 $\tau_i, y_i, z_i$  はそれぞれ  $i$  番目における取引時間間隔、価格変化、残存期間であり、 $d_i$  は第 2. 3 節で利用した取引時間帯ダミーである。また、

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \\ \chi &= \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{19} \\ \delta_{21} & \cdots & \delta_{29} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

である。ACM モデルにおける状態 1, 2, 3 はそれぞれ、「価格下落」、「価格上昇」、「価格変化無し」を表す。なお、モデル中のラグの次数は AIC を最小とする次数を選択した。取引時間帯ダミーを導入するのは、第 2. 3 節における予備的分析において価格変化に日中季節性が存在されることが示唆されたからである。

現時点での取引時間間隔が価格変化確率に及ぼす影響を示しているのが  $\chi_{11}, \chi_{21}$  である。両者とも  $-0.4$  程度の値をとっていることから、1 回前から今回の約定までの取引時間間隔が長いと価格変化が起きる確率が低くなることがわかる。一方、Russell and Engle (2005) では、取引時間間隔が長くなると価格が下落する確率が高くなることを報告している。この違いは、分析対象が本稿では金先物であるのに対し、Russell and Engle (2005) では、米国株式市場の個別銘柄であることに起因していると考えられる。

Russell and Engle (2005) では、取引時間間隔が長くなると価格が下落する確率が高くなる理由を、Diamond and Verrecchia (1987) の理論モデルに求めている。このモデルによれば、空売りに関する制限がある市場では、悪いニュースが市場に流入しても、投資家が望むように空売りができず、その結果取引時間間隔が長くなる傾向がある。

一方、金先物市場では空売りに関する規制は現物株式市場より緩やかであるため、悪いニュースが市場に流入すれば、即座に空売りすることが可能であると考えられる。したがって、Russell and Engle (2005) で見られた現象が本分析では見られないのではないだろうか。

取引時間帯ダミー  $\delta_{11}, \dots, \delta_{19}, \delta_{21}, \dots, \delta_{29}$  をみると、すべてが負の値をとり、午前の取引開始直後にくらべ、他の取引時間帯においては価格変動が起きる確率が小さくなることが示された。日中取引時間帯ダミーが価格変化確率に与える影響のパターンは第2. 3節とほぼ同様の変動を示している。すなわち、午前の取引開始直後と、午後の取引終了直前の時間帯にもっとも価格が変動する傾向が見受けられる。

モデルのACD部の推定結果では、 $\beta_1 + \beta_2$  が0.9998と極めて1に近い値をとり、日中季節調整後でも、取引時間間隔は過去に強い影響を受けることが示される。また、 $\rho_1 = 0.0162$  より、1回前の取引において価格が上昇していれば今期の取引時間間隔が長くなる。また、 $\xi = 0.016$  であるので、取引される金先物の残存期間が長ければ取引時間間隔も長くなることがわかる。

表2 : ACM(3, 3)-ACD(2, 2)の推定結果

		状態1		状態2		ACD
	$c_1$	-0.4487 (0.0478)	$c_2$	-0.3713 (0.0538)	$\omega$	-0.0146 (0.0031)
$A_1$	$a_{11}$	-2.5867 (0.0410)	$a_{21}$	2.5029 (0.0263)	$\alpha_1$	0.0432 (0.0028)
	$a_{12}$	2.0147 (0.0267)	$a_{22}$	-2.9669 (0.0395)	$\alpha_2$	-0.0382 (0.0027)
$A_2$	$a_{11}$	1.4555 (0.2104)	$a_{21}$	-2.0575 (0.2031)	$\beta_1$	1.7801 (0.0216)
	$a_{12}$	-1.1857 (0.1671)	$a_{22}$	2.4121 (0.2420)	$\beta_2$	-0.7803 (0.0216)
$A_3$	$a_{11}$	0.3164 (0.1839)	$a_{21}$	0.2767 (0.1637)	$\rho_1$	0.0162 (0.0066)
	$a_{12}$	-0.0075 (0.1435)	$a_{22}$	-0.1514 (0.1959)	$\rho_2$	-0.0164 (0.0066)
$B_1$	$b_{11}$	0.3285 (0.0804)	$b_{22}$	0.5792 (0.0802)	$\xi$	0.0016 (0.0005)
$B_2$	$b_{11}$	0.2128 (0.0547)	$b_{22}$	0.0990 (0.0504)		
$B_3$	$b_{11}$	0.0131 (0.0171)	$b_{22}$	-0.0237 (0.0147)		
$\chi$	$\chi_{11}$	-0.4423 (0.0108)	$\chi_{21}$	-0.4131 (0.0114)		
	$\chi_{12}$	0.1877 (0.0369)	$\chi_{22}$	0.2311 (0.0389)		

	$\chi_{13}$	0.1105 (0.0319)	$\chi_{23}$	0.0735 (0.0297)
$\delta$	$\delta_{11}$	-0.0353 (0.0122)	$\delta_{21}$	-0.0337 (0.0107)
	$\delta_{12}$	-0.0573 (0.0136)	$\delta_{22}$	-0.0513 (0.0123)
	$\delta_{13}$	-0.0366 (0.0129)	$\delta_{23}$	-0.0489 (0.0122)
	$\delta_{14}$	-0.0522 (0.0144)	$\delta_{24}$	-0.0447 (0.0126)
	$\delta_{15}$	-0.0486 (0.0138)	$\delta_{25}$	-0.0486 (0.0125)
	$\delta_{16}$	-0.0308 (0.0133)	$\delta_{26}$	-0.0286 (0.0112)
	$\delta_{17}$	-0.0520 (0.0141)	$\delta_{27}$	-0.0512 (0.0128)
	$\delta_{18}$	-0.0550 (0.0142)	$\delta_{28}$	-0.0586 (0.0133)
	$\delta_{19}$	-0.0151 (0.0117)	$\delta_{29}$	-0.0299 (0.0104)
最大対数尤度	-168581.74	AIC	337267	

状態1、状態2はそれぞれ「価格下落」、「価格上昇」を表す。

括弧内の数値は標準誤差を表す。

#### 4. 2 価格変化の状態推移確率の対称性を考慮したモデル推定

第4.1節の推定結果から、取引時間帯ダミーは1回の取引における価格変化確率に等しく影響を与えている可能性が示された。本節では、この可能性、すなわち

$$\delta_{1i} = \delta_{2i} \quad (i = 1, \dots, 9) \quad (16)$$

を帰無仮説として、尤度比検定を行う。

(16)式の制約をおいたもとのACM-ACDモデルを推定した結果を表3に示す。取引時間帯ダミーを含むすべてのパラメータについて、制約を課さない推定結果とほぼ同じ値をとっていることがわかる。また、このときの最大対数尤度は-168590である。第4.1節の推定で得られた最大対数尤度は-168581であったので、尤度比検定統計値は18となる。自由度9の $\chi^2$ 分布の上側10%点は25.98であるので、帰無仮説 $\delta_{1i} = \delta_{2i} \quad (i = 1, \dots, 9)$ は10%の有意水準で棄却されない。このことから、取引時間帯が価格変化確率に与える影響の度合いは、価格が上昇する、下落

するに関わらず一定であることがわかる。いいかえれば、1回の取引において、価格が上昇しやすい（あるいは下落しやすい）時間帯というものは存在しないことが示される。

同様に、 $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \chi$ についても価格変化の状態推移確率の対称性を検証したが、5%の有意水準で対称性が棄却された。

表3：取引時間帯ダミーに対称性を考慮した ACM(3, 3)-ACD(2, 2)モデル

		状態1			状態2	ACD
	$c_1$	-0.4442 (0.0463)	$c_2$	-0.3776 (0.0458)	$\omega$	-0.0146 (0.0031)
$A_1$	$a_{11}$	-2.5852 (0.0410)	$a_{21}$	2.5015 (0.0263)	$\alpha_1$	0.0432 (0.0028)
	$a_{12}$	2.0150 (0.0267)	$a_{22}$	-2.9651 (0.0395)	$\alpha_2$	-0.0382 (0.0027)
$A_2$	$a_{11}$	1.4805 (0.2076)	$a_{21}$	-2.0237 (0.1980)	$\beta_1$	1.7801 (0.0216)
	$a_{12}$	-1.2058 (0.1652)	$a_{22}$	2.3718 (0.2347)	$\beta_2$	-0.7803 (0.0216)
$A_3$	$a_{11}$	0.2942 (0.1836)	$a_{21}$	0.2554 (0.1639)	$\rho_1$	0.0162 (0.0066)
	$a_{12}$	0.0084 (0.1434)	$a_{22}$	-0.1239 (0.1963)	$\rho_2$	-0.0164 (0.0066)
$B_1$	$b_{11}$	0.3384 (0.0794)	$b_{22}$	0.5661 (0.0780)	$\xi$	0.0016 (0.0005)
$B_2$	$b_{11}$	0.2070 (0.0547)	$b_{22}$	0.1049 (0.0503)		
$B_3$	$b_{11}$	0.0109 (0.0171)	$b_{22}$	-0.0223 (0.0147)		
$\chi$	$\chi_{11}$	-0.4420 (0.0108)	$\chi_{21}$	-0.4132 (0.0114)		
	$\chi_{12}$	0.1920 (0.0364)	$\chi_{22}$	0.2255 (0.0376)		
	$\chi_{13}$	0.1068 (0.0319)	$\chi_{23}$	0.0773 (0.0297)		
$\delta$	$\delta_{11}$	-0.0344 (0.0104)	$\delta_{21}$	-0.0344		
	$\delta_{12}$	-0.0532 (0.0117)	$\delta_{22}$	-0.0532		

$\delta_{13}$	-0.0484 (0.0116)	$\delta_{23}$	-0.0484
$\delta_{14}$	-0.0461 (0.0121)	$\delta_{24}$	-0.0461
$\delta_{15}$	-0.0491 (0.0119)	$\delta_{25}$	-0.0491
$\delta_{16}$	-0.0290 (0.0111)	$\delta_{26}$	-0.0290
$\delta_{17}$	-0.0519 (0.0122)	$\delta_{27}$	-0.0519
$\delta_{18}$	-0.0591 (0.0125)	$\delta_{28}$	-0.0591
$\delta_{19}$	-0.0293 (0.0101)	$\delta_{29}$	-0.0293
最大対数尤度	-168590	AIC	337266

状態 1、状態 2 はそれぞれ「価格下落」、「価格上昇」を表す。  
括弧内の数値は標準誤差を表す。

## 5. おわりに

本稿では、東工取上場の金先物ティック・データを用い、価格変化と取引時間間隔を同時に扱う ACM-ACD モデルを推定することによって、金先物市場のマーケット・マイクロストラクチャーの分析を行った。

分析の結果から、価格変化と取引時間間隔には日中季節性が存在することが明らかになった。価格変化は午前の取引開始直後と午後の取引終了直前に生じやすく、この時間帯のボラティリティが高いことが示された。また、これらの時間帯では取引時間間隔も他の時間帯に比べ短く、活発に取引がなされていることが明らかになった。これらの結果は芹田ほか(2005)と整合的であり、株式市場などの他の金融市場とほぼ同様の特性を有していることを示している。

他の金融商品と同様に金先物においても、取引時間間隔は過去の取引時間間隔に強く影響を受けることが示された。また、残存期間が長ければ取引時間間隔も長くなることが明らかになった。

取引時間間隔と、価格変化が生じる確率については、取引時間間隔が長いと価格変化が起きる確率が低くなること示された。この結果は、Russell and Engle(2005)の結果と整合的ではないが、これは本稿の分析対象が空売りに対して規制が緩やかな金先物市場であることに起因していると考えられる。

さらに、取引時間帯が価格変化確率に与える影響の程度を検証したところ、1回の取引において、価格が上昇しやすい(あるいは下落しやすい)時間帯というもの存在しないことが示された。

本稿では ACM-ACD モデルを利用することによって、金先物の日中の価格変動特性と取引時

間隔の関係进行分析した。このモデルは金先物のように流動性が高く、1回の取引における価格変化パターンが少ない商品の分析には有効であるが、銀先物やパラジウム先物等の1回の取引における価格変化パターンが多い商品の分析には困難が伴う。なぜなら、モデルで仮定する価格変化の数が増えるにつれて、推定すべきパラメータの数が増大するからである。Liesenfeld et al. (2005) は、1回の取引で生じる価格変化のパターン数が多い商品の分析に適したモデルを提案している。今後、このようなモデルによる推定を視野に入れ、我が国貴金属先物市場のマーケット・マイクロストラクチャーの分析を行うことを今後の課題としたい。

## 参考文献

- 飯原慶雄・加藤英明・徳永俊史「金先物価格の時系列分析：日米比較」、『先物取引研究』, 第4巻, 第2号, 2000年3月.
- 芹田敏夫・濱田隆道・荒木浩介・坂本智幸「金先物市場の価格形成と流動性：取引データに基づく実証研究」市場構造研究所ワーキングペーパー, 2005年6月.
- 羽森茂之・羽森直子(2000)「商品先物市場における収益率の時系列特：ボラティリティの日米比較」、『先物取引研究』, 第4巻, 第2号, 2000年3月.
- 森保洋・須齋正幸(2004)「日経225先物の日中取引頻度—大阪証券取引所とシンガポール取引所の連関性—」, 『生活経済学研究』, 第20巻, 2004年9月, pp.145-160.
- 渡部敏明・大森裕浩(2000)「日本の商品先物市場における価格と出来高の変動：動学的2変量分布混合モデルによる分析」, 『先物取引研究』, 第5巻, 第1号, 2000年9月.
- Bauwens, L. and P. Giot. (2001), "The logarithmic ACD model : An application to the bid-ask quote process," *Annales d'Économie et de Statistique*, No. 60, pp.117-149.
- Clark, P. (1973), "A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative process," *Econometrica*, 41, 135-155.
- Engle, R. and J. Russell. (1998), "Autoregressive conditional duration: A new model for irregularly spaced data," *Econometrica*, Vol. 66, No. 5, pp.1127-1162.
- Friedman, J. (1984), A variable span scatterplot smoother. Laboratory for Computational Statistics, Stanford University Technical Report No. 5.
- Liesenfeld, R., I. Nolte, and W. Pohlmeier. (2005), "Modeling financial transaction price movements: A dynamic integer count data model," *Economics Working Paper*, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- Russell, J. and R. Engle. (2005), "A discrete-state continuous-time model of financial transactions prices and times: The autoregressive conditional multinomial-autoregressive conditional duration model," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol.23, No. 2, pp.166-180.
- Schwartz, E. (1997), "The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging," *Journal of Finance*, Vol. 52, Issue 3, pp. 923-973.
- Zhang, M., J. Russell and R. Tsay. (2001), "A nonlinear autoregressive conditional duration model with applications to financial transaction data," *Journal of Econometrics*, Vol. 104, Issue 1, pp. 179-207.