日本の商品先物市場における価格と出来高の変動：動学的２変量分布混合モデルによる分析

渡　部　敏　明*
大　森　裕　浩

1　はじめに

資産市場における価格と出来高の関係は、古くから実務家や研究者の注目を集めており、多くの実証研究が行われてきた。しかし、そうした研究の多くは、特定の理論に基づかず、fact findingだけを目的としている。日本の商品先物市場における価格と出来高の関係についての実証研究には渡部/大鋸（1996）があるが、それも同様である。その一方で、価格と取引高に関する理論的なモデルもいくつか提案されている。例えば、分布混合モデル(Tauchen/Pitts（1983)、Andersen（1996))、Sequential Informationモデル(Copeland（1976))、Microstructure モデル(Admati/Pfleiderer（1988))、Noisy Rational Expectationsモデル(Wang(1994))等がそうである。本論文では、そうしたモデルの中から、特に、Tauchen/Pitts(1983）によって提案されたモデルを取り上げ、それが日本の商品先物市場における価格と出来高の変動をうまくとらえることができるかどうか実証分析を行った。

資産市場における価格と出来高の関係についてよく知られているのは、価格のボラティリティと出来高の間に正の相関があること、すなわち、価格の変動が大きかった日には出来高

---

* 〒192-0364 東京都八王子市南大沢1-1 東京都立大学経済学部。本研究は 日本商品取引員協会より助成を受けている。また、本研究で用いたデータはすべて同協会より提供して頂いたものである。ここに記して感謝の意を表したい。

も大きいことである。価格と出来高の関係についての研究のサーベイ論文にはKarpoff (1987) があり、そこではボラティリティと取引高の間に正の相関を観測している18の論文が引用されている。Tauchen/Pitts（1983）モデルは、こうした価格のボラティリティと出来高の間の正の相関を「分布混合仮説 (Mixture-of-Distributions Hypothesis)」によって説明する。この仮説は、Clark（1973）によって提案されたもので、１日に市場に入ってくる情報量または１日の取引回数が日々確率的に変動すると考える。そうすると、市場に多くの情報が入ってきて取引回数が多かった日はボラティリティが上昇し、同時に、取引高も膨らむと考えられる。Clark（1973）は、出来高がどのように決まるかについては議論せず、ただ単に、出来高を１日の取引回数の代理変数として取り扱っているのに対して、Tauchen/Pitts (1983) は、価格変化率と取引高とがどちらも内生的に同時決定されるモデルを提案している。彼等のモデルでは、１日の中の１回１回の取引で生じる価格変化率と出来高は互いに独立であるが、取引回数が日々変動することにより、日次データでは、価格変化率のボラティリティと出来高の間に正の相関が生じることになる。ただ、一つ問題点があり、それは、１日の取引回数を過去と独立な確率変数であると仮定していることである。この仮定の下では、ボラティリティや出来高も過去と独立に変動することになる。ボラティリティや出来高は自己相関が高いことが知られているので、それと矛盾する。そこで、本研究では、１日の取引回数が自己相関を持って変動している可能性を考慮に入れる。このように Tauchen/Pitts (1983) モデルにおいて、１日の取引回数に自己相関を許容したモデルは、「動学的２変量分布混合 (Dynamic Bivariate Mixture；以下、略して、DBM) モデル」と呼ばれる。

１日に市場に入ってくる情報量や１日の取引回数は、通常、観測できない変数であり（そうした変数を「潜在変数 (latent variable)」と呼ぶ）、そうした変数が自己相関を持って変動するモデルは尤度を解析的に評価することが難しく、したがって、最尤法によってパラメータの値を推定することが難しい。そこで、実際のデータを用いてDBMモデルを推定するという研究はこれまであまり行われてこなかった。しかし、皆無と言うわけではなく、Lamoureux/Lastrapes（1994）は積率法 (MM)、Andersen（1996）は一般化積率法（GMM）、Liesenfeld（1998）はシミュレーションによる最尤法 (SMM)、Watanabe（2000）はマルコフ連鎖モンテカルロ法に基づくベイズ推定法を用いて、それぞれDBMモデルの推定を行っている。本論文では、この中で、特に、Watanabe（2000）で提案されているマルコフ連鎖モンテカルロ法に基づくベイズ推定法を用いている。これは、マルコフ連鎖モンテカルロ法と呼ばれる方法によってパラメータおよび潜在変数である取引回数を事後分布からサンプリングし、サンプリングされた値を用いてパラメータの値を推定するという方法である。この方法には他の方法にはないメリットがあり、それは、パラメータだけでなく、価格変化率の２乗や出来高の自己相関係数および価格の２乗と出来高の相関係数といったものの値もその事後分布からサンプリングできることである。本研究では、それらを標本から計算される標本自己相関係数や相関係数と比較することにより、DBMモデルが日本の商品先物市場における価格や出来高の変動をうまく捉えているかどうか分析している。

本論文の構成は以下の通りである。まず、第２章で、DBMモデルについて解説を行う。次の第３章では、DBMモデルのベイズ推定法について解説を行う。第４章で、分析に使ったデータについて説明した後、実証結果をまとめる。最後に、第５章において、結論と今後の発展について述べる。

2　資産価格と取引高の動学的２変量分布混合モデル

Tauchen/Pitts（1983）モデルは、先物市場を対象としたモデルである。ある先物市場では、J人の投資家が参加しており、第t取引日には、日中、I_t 回の取引が行われたものとしよう。このI_t 回の中の第i番目の取引における第j投資家の（ストックの）需要関数Q_{ij}は、次式のように、留保価格 P_{ij}^*と市場価格 p_iの比の増加関数であるものとする。

$$Q_{ij} = \alpha \ln(p_{ij}^* / p_i) \tag{1}$$

ここで、αは正の値の定数である[1]。(1)式を先物市場の均衡条件

$$\sum_{j=1}^{J} Q_{ij} = 0$$

に代入することにより、均衡価格（の対数値）が次のように求まる。

$$\ln(p_i) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} \ln(p_{ij}^*). \tag{2}$$

また、日中の第i番目の取引における価格変化率と出来高はそれぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} r_i &\equiv \Delta \ln(p_i), \\ &= \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} \Delta \ln(p_{ij}^*), \\ v_i &\equiv \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J} | Q_{ij} - Q_{i-1,j} |, \end{aligned} \tag{3}$$

[1] 正確に言うと、Tauchen/Pitts (1983)は、需要関数を、(1)式ではなく、次のように定式化している。

$$Q_{ij} = \alpha (p_{ij}^* - p_i). \tag{1'}$$

そうすると、価格の変分と出来高の関係が導かれるのに対して、(1)式のように定式化すると、価格変化率と出来高の関係が導かれる。

$$= \frac{a}{2}\sum_{j=1}^{J} |\Delta \ln(p_{ij}^{*}) - \Delta \ln(p_i)|. \tag{4}$$

ただし、

$$\Delta \ln(p_i) = \ln(p_i) - \ln(p_{i-1}),$$

$$\Delta \ln(p_{ij}^{*}) = \ln(p_{ij}) - \ln(p_{i-1,j})$$

である。

Tauchen/Pitts（1983）は$\Delta \ln(p_{ij}^{*})$を、すべての投資家に共通なf_iと第j投資家に固有なΨ_{ij}という２つの確率変数の和として次式のように定式化している。

$$\Delta \ln(p_{ij}^{*}) = f_i + \Psi_{ij}. \tag{5}$$

ここで、f_iとΨ_{ij}はすべてのi,jで独立であり、また、

$$\mathrm{E}(f_i) = \mathrm{E}(\Psi_{ij}) = 0,$$

$$\mathrm{Var}(f_i) = s_f^2, \quad \mathrm{Var}(\Psi_{ij}) = s_\Psi^2$$

と仮定する。

(5)式を、(3),(4)式に代入すると、次式が得られる。

$$r_i = f_i + \overline{\Psi}_{ij}, \quad \overline{\Psi}_i \equiv \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} f_{ij}, \tag{6}$$

$$v_i = \frac{a}{2}\sum_{j=1}^{J} |\Psi_{ij} - \overline{\Psi}_{ij}|. \tag{7}$$

さらに、Jは十分大きいものとし、「中心極限定理」を適用すると、次の３つの命題が得られる。

（ｉ） $r_i \sim N(0, s_r^2)$. ただし、 $s_r^2 = s_f^2 + \frac{1}{J} s_j^2.$

（ii） $v_i = N(m_v, s_v^2)$ただし、

$$m_v = \frac{a}{2} s_\Psi \sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{J-1}{J}}J,$$

$$s_v^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 s_\Psi^2 \left(1 - \frac{2}{p}\right)J.$$

（iii） r_iと v_iは互いに独立.

r_iとv_iが互いに独立であるということは、日中の１回１回の取引では、価格変化率のボラ

ティリティと出来高の間には何ら相関がないということである。しかし、「分布混合仮説」では、市場に入ってくる情報量が日々確率的に変動し、それによって、１日の取引回数も日々確率的に変動するものと考える。したがって、１回１回の取引では、価格変化率のボラティリティと出来高の間には何ら相関がなくても、日次の価格変化率のボラティリティと出来高の間に正の相関が生じることになる。日次の価格変化率および出来高を求めるには、日中の収益率 r_i 出来高v_i を１日で合計すればよい。第t日の取引回数をI_t とすると、第t日の日次収益率 R_t および出来高 V_tは、次のように表される。

$$R_t = \sum_{i=1}^{It} r_i = s_r \sqrt{It} z_{rt}, \quad z_{rt} \sim \mathbf{i.i.d.} N(0,1), \tag{8}$$

$$V_t = \sum_{i=1}^{It} v_i = m_v It + s_v \sqrt{It} z_{vt}, \quad z_{vt} \sim \mathbf{i.i.d.} N(0,1). \tag{9}$$

ここで、z_{rt}, z_{vt}は互いに独立な確率変数である。

(8),(9)式は、I_t が与えられると、 R_t とV_tが互いに独立な正規分布に従うことを示している。しかし、I_t が日々確率的に変動するなら、 R_t とV_t の無条件分布は正規分布ではなく、混合正規分布になる。このことから、このモデルは、「２変量の分布混合（bivariate mixture；BM）モデル」と呼ばれる。また、(8),(9)式より、I_t の上昇（下落）は、価格変化率の分散と出来高の平均をどちらも上昇（下落）させることがわかる。したがって、このモデルは、価格変化率のボラティリティと出来高の間に正の相関があるという事実と整合的ということになる。

I_t は日々確率的に変動するので、モデルを完結させるためには、さらに、I_t の変動を定式化しなければならない。Tauchen/Pitts（1983）は、I_t を過去と独立な対数正規分布に従うと仮定している[2]。しかし、もしそうであれば、価格変化率のボラティリティおよび取引高は過去と独立であることになる。既に述べたように、価格変化率のボラティリティのショックは持続性が高い。また、出来高も、通常、高い自己相関を持っている。そこで、その後の研究では、I_t の自己相関を考慮した定式化が行われている[3]。ここでは、I_t の対数値をAR(1)モデル

$$\ln(I_t) = m + f \ln(I_{t-1}) + h_t, \quad h_t \sim \mathbf{i.i.d.} N(0, s_h^2) \tag{10}$$

によって定式化する。ただし、 h_tは z_{rt}, z_{vt}と独立な確率変数である。

---

[2] Richardson/Smith（1994）は、ガンマ分布やポアソン分布といった他の分布も考えている。

[3] Andersen（1996），Liesenfeld（1998），Watanabe（2000）は、(10)式と同じ定式化を行っている。それに対して、Lamoureux/Lastrapes（1994）は、対数をとらないI_t がAR(1)モデルに従うとしている。

ここで、(8)-(10)式から成るモデルのパラメータの値は一意には選べないことに注意しよう[4]。そこで、どれか一つのパラメータを固定してやる必要がある。ここでは、μ＝0とする。また、$\ln(I_t)$を、以下、h_tで表すことにする。そうすると、(8)-(10)式は次のように表わされる。

$$R_t = s_r \exp(h_t/2) z_{rt}, \quad z_{rt} \sim \mathbf{i.i.d.} N(0,1), \tag{8'}$$

$$V_t = m_v \exp(h_t) + s_v \exp(h_t/2) z_{vt}, \quad z_{vt} \sim \mathbf{i.i.d.} N(0,1), \tag{9'}$$

$$h_t = f h_{t-1} + \boldsymbol{h}_t, \quad \boldsymbol{h}_t \sim \mathbf{i.i.d.} N(0, s_h^2). \tag{10'}$$

このモデルを、「動学的２変量分布混合 (Dynamic Bivariate Mixture；DBM) モデル」と呼ぶ。このモデルは、(9')式を無視すると、すなわち、(8'),(10') 式だけを考えると、金融工学の分野で有名な確率的ボラティリティ変動 (Stochastic Volatility；SV) モデルになる。(SVモデルについて詳しくは、Ghysels/Harvey/Renault (1996)、Shephard (1996、Section 1.3)、渡部 (2000、第３章) を参照のこと。) SVモデルのパラメータは最尤推定することが難しいことが知られており、DBMモデルも同様である。そこで、本論文では、Watanabe (2000)で提案されているベイズ推定法を用いて分析を行っている。

３　動学的２変量分布混合モデルのベイズ分析

(8')-(10')式から構成されるDBMモデルの未知パラメーターは、

$$m_v, f, s_r^2, s_v^2, s_h^2$$

であり、以下、それらをまとめて、θで表すことにする。これらのパラメーターに関して、ここでは、次のようなnon-informativeな事前分布を仮定する。

$$f(m_v) \propto I[0,\infty], \quad f(f) \propto I[-1,1],$$

$$f(s_r^2) \propto 1/s_r^2, \quad f(s_v^2) \propto 1/s_v^2, \quad f(s_h^2) \propto 1/s_h^2.$$

ただし、$I[a,b]$は、区間 $[a,b]$ の間では１、それ以外では０となる関数 (indicator function) である。つまり、m_v, fの事前分布は、それぞれ、区間[0,∞],[-1,1]の一様分布である。

---

[4] 各パラメーターの真の値が、

$$(\{I_t^*\}_{t=0}^T, m_v^*, s_r^*, s_v^*, m^*, f^*, s_h^*)$$

であるとしよう。このとき、kを正の定数とすると、

$$(\{kI_t^*\}_{t=0}^T, m_r^*/k, s_r^*/k, s_v^*/k, m^* + (1-f^*)\ln(k), f^*, s_h^*)$$

も(8)-(10)式を満たす。

m_vは正のパラメーターなので、区間[0,∞]に限定している。また、φの事前分布を区間[-1,1]に限定しているのは、 h_tは定常的であると仮定しているからである。

DBMモデルの場合、ベイズの定理を用いて解析的に事後分布

$$f(q \mid \{R_s\}_{s=1}^{T}, \{V_s\}_{s=1}^{T})$$

を求めることは難しい。しかし、そういった場合でも、MCMC法を使えば、事後分布からθをサンプリングすることが可能である。MCMC法とは、通常のランダム・サンプリングと違い、１回前にサンプリングされた値に依存して次の値をサンプリングする方法の総称である。（MCMC法について詳しくは、Gilks/Richardson/Spiegelhalter（1996)、Gamerman (1997)、渡部（2000、第３章）を参照のこと。）MCMC法としてよく使われるものには、Gibbs samplerとMetropolis-Hastingsアルゴリズムがある。

Gibbs Sampler について説明するために、いま、(q_1, q_2, q_3) という３つのパラメーター((q_1, q_2, q_3)はそれぞれベクトルであっても構わない)をその同時密度 $f(q_1, q_2, q_3)$からサンプリングしたいが、$f(q_1, q_2, q_3)$からは直接サンプリングすることができないものとしよう。その代わり、$f(q_1 \mid q_2, q_3), f(q_2 \mid q_3, q_1), f(q_3 \mid q_1, q_2)$といった条件付密度からはサンプリングできるものとする。このような場合に使われるのがGibbs Samplerである。適当な初期値$q_2^{(0)}, q_3^{(0)}$の下で、まず、$f(q_1 \mid q_2^{(0)}, q_3^{(0)})$からサンプリングを行い、得られた値を$q_1^{(1)}$とする。次に、$f(q_2 \mid q_3^{(0)}, q_1^{(1)})$からサンプリングを行い、得られた値を$q_2^{(1)}$とする。さらに、$f(q_3 \mid q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$からサンプリングを行い、得られた値を$q_3^{(1)}$とする。以上を第１ループと呼び、そこで得られた$q_2^{(1)}, q_3^{(1)}$を使って第２ループを始める。まず、$f(q_1 \mid q_2^{(1)}, q_3^{(1)})$からサンプリングを行い、得られた値を$q_1^{(2)}$とする。次に、$f(q_2 \mid q_3^{(1)}, q_1^{(2)})$からサンプリングを行い、得られた値を$q_2^{(2)}$とする。さらに、$f(q_3 \mid q_1^{(2)}, q_2^{(2)})$からサンプリングを行い、得られた値を$q_3^{(2)}$とする。以上のループを繰り返すと、第$n$ループでは、$(q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, q_3^{(n)})$が得られるが、$n \to \infty$とすると、$(q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, q_3^{(n)})$は同時密度$f(q_1, q_2, q_3)$に分布収束することが知られている。すなわち、$(q_1^{(N)}, q_2^{(N)}, q_3^{(N)})$ は、N が十分大きければ、同時密度$f(q_1, q_2, q_3)$からサンプリングされた値であると考えてよいことになる。そこで、上のループを十分大きな回数M回繰り返した後、さらにN回のループを行って得られる$\{(q_1^{(M+1)}, q_2^{(M+1)}, q_3^{(M+1)}), \ldots, (q_1^{(M+N)}, q_2^{(M+N)}, q_3^{(M+N)})\}$を、同時密度$f(q_1, q_2, q_3)$からサンプリングされたものと考え、それらを用いて$q_1, q_2, q_3$の推定を行えばよい。例えば、$q_1$の平均は、標本平均

$$\frac{1}{N}\sum_{i=M+1}^{M+N} q_1^{(i)}$$

として推定すればよい。

このGibbs samplerを応用すると、DBMモデルの未知パラメータθを事後分布からサンプリングするためには、条件付き分布

$$
\begin{aligned}
&f(m_v \mid \{R_s\}_{s=1}^T, \{V_s\}_{s=1}^T, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}_r^2, \boldsymbol{s}_v^2, \boldsymbol{s}_h^2) \\
&f(\boldsymbol{f} \mid \{R_s\}_{s=1}^T, \{V_s\}_{s=1}^T, m_h, \boldsymbol{s}_r^2, \boldsymbol{s}_v^2, \boldsymbol{s}_h^2) \\
&f(\boldsymbol{s}_r^2 \mid \{R_s\}_{s=1}^T, \{V_s\}_{s=1}^T, m_v, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}_v^2, \boldsymbol{s}_h^2) \\
&f(\boldsymbol{s}_v^2 \mid \{R_s\}_{s=1}^T, \{V_s\}_{s=1}^T, m_v, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}_r^2, \boldsymbol{s}_h^2) \\
&f(\boldsymbol{s}_h^2 \mid \{R_s\}_{s=1}^T, \{V_s\}_{s=1}^T, m_v, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}_r^2, \boldsymbol{s}_v^2)
\end{aligned}
$$

から繰り返しサンプリングを行えばよいということになる。ところが、こうした条件付き分布はこのままでは閉じた形として求めることができない。

そこで、条件の中にさらに $\{h_t\}_{t=0}^T$ を含めた

$$f(m_v \mid \{R_s\}_{s=1}^T, \{V_s\}_{s=1}^T, \{h_s\}_{s=0}^T, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}_r^2, \boldsymbol{s}_v^2, \boldsymbol{s}_h^2) \tag{11}$$

$$f(\boldsymbol{f} \mid \{R_s\}_{s=1}^T, \{V_s\}_{s=1}^T, \{h_s\}_{s=0}^T, m_v, \boldsymbol{s}_r^2, \boldsymbol{s}_v^2, \boldsymbol{s}_h^2) \tag{12}$$

$$f(\boldsymbol{s}_r^2 \mid \{R_s\}_{s=1}^T, \{V_s\}_{s=1}^T, \{h_s\}_{s=0}^T, m_v, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}_v^2, \boldsymbol{s}_h^2) \tag{13}$$

$$f(\boldsymbol{s}_v^2 \mid \{R_s\}_{s=1}^T, \{V_s\}_{s=1}^T, \{h_s\}_{s=0}^T, m_v, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}_r^2, \boldsymbol{s}_h^2) \tag{14}$$

$$f(\boldsymbol{s}_h^2 \mid \{R_s\}_{s=1}^T, \{V_s\}_{s=1}^T, \{h_s\}_{s=0}^T, m_v, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}_r^2, \boldsymbol{s}_v^2) \tag{15}$$

を考える。これらは簡単に求めることができる（補論A参照)。ただし、そうすると、さらに、

$$f(h_t \mid \{h_s\}_{s\neq t}, \{R_s\}_{s=1}^T, \{V_s\}_{s=1}^T, \boldsymbol{q}) \quad (t = 0,\ldots,T) \tag{16}$$

を加えて、(11)-(16)から繰り返しサンプリングを行わなければならない。このように、$h_t(T = 1,2,\ldots,T)$ を１つ１つ、条件付密度(16)からサンプリングする方法はsingle-move samplerと呼ばれる。しかし、φが１に近い場合に、こうしたsingle-move samplerを使うと、Gibbs samplerの収束のスピードが遅いことがShephard/Pitt（1997）により指摘されている。Shephard/Pitt（1997）は、Gibbs samplerの収束のスピードを速めるため、blockingと呼ばれるテクニックを用いたmulti-move samplerと呼ばれる方法を提案しており、本論文でもそちらを用いている。

Shephard/Pitt（1997）のmulti-move samplerでは、h_tではなく、(10')式の誤差項$\boldsymbol{h}_t$をサンプリングする。また、１つ１つサンプリングするのではなく、$\{\boldsymbol{h}_t\}_{t=1}^T$ をいくつかのブロックに分けて、１つのブロックを１度にサンプリングする。すなわち、$(\boldsymbol{h}_t,\ldots,\boldsymbol{h}_{t+k})$ を１つのブロックだとすると、それを、

$$f(\{\boldsymbol{h}_s\}_{s=t}^{t+k} \mid h_{t-1}, h_{t+k+1}, \{R_s\}_{s=t}^{t+k}, \{V_s\}_{s=t}^{t+k}, \boldsymbol{q}), \tag{17}$$

からサンプリングする。(17)は、対数をとると、次のように表すことができる。

$$\ln(f(\{\eta_s\}_{s=t}^{t+k} \mid h_{t-1}, h_{t+k+1}, \{R_s\}_{s=t}^{t+k}, \{V_s\}_{s=t}^{k}, \theta)),$$
$$= \text{定数} - \frac{1}{2}\sum_{s=t}^{t+k}\eta_s^2 - \sum_{s=t}^{t+k} l(h_s) \tag{18}$$

ただし、

$$l(h_s) \equiv -h_s - \frac{R_s^2/\sigma_r^2 + V_s^2/\sigma_v^2}{2\exp(h_s)} - \frac{\mu_v^2\exp(h_s)}{2}$$

である。(18)式を$\{\hat{h}_s\}_{s=t}^{t+k}$の回りで２次までテーラー展開すると、次式が得られる。($\{\hat{h}_s\}_{s=t}^{t+k}$ をどのように選択するかについては以下で説明する。また、$\{\hat{h}_s\}_{s=t}^{t+k}$ に対応する $\{h_s\}_{s=t}^{t+k}$ を、$\{\hat{\eta}_s\}_{s=t}^{t+k}$ と表すことにする。)

$$\ln(f(\{\eta_s\}_{s=t}^{t+k} \mid \bullet))$$
$$\approx \text{const} - \frac{1}{2}\sum_{s=t}^{t+k}\eta_s^2 + \sum_{s=t}^{t+k}\{l(\hat{h}_s) + (h_s - \hat{h}_s)l'(\hat{h}_s) + \frac{1}{2}(h_s - \hat{h}_s)l''(\hat{h}_s)\}$$
$$= \ln g \bullet$$

このgをある定数倍すると、k次元正規分布の密度関数になる。Shephard/Pitt (1997) は、このgをproposal densityとして、Tierney (1994) によって提案されたacceptance-rejection/Metropolis-Hastinsアルゴリズムにより $(h_t, \ldots, h_{t+k})$ をサンプリングしている。

gからcandidateをサンプリングするには、次のようにすればよい。まず、次のような変数を定義する。

$$\hat{\varepsilon}_s = \hat{h}_s - \frac{l'(\hat{h}_s)}{l''(\hat{h}_s)} \ (s = t, \ldots, t+k). \tag{19}$$

この$\hat{\varepsilon}_s$を観測される変数、h_sを状態変数とする次のような線形状態空間モデルを考えよう。

$$\hat{\varepsilon}_s = h_s + \xi_s, \quad \xi_s \sim N(0, -1/l''(\hat{h}_s)), \tag{20}$$

$$h_s = \phi h_{s-1} + \eta_s, \quad \eta_s \sim N(0, \sigma_\eta^2). \tag{21}$$

これにde Jong/Shephard (1995) によって提案されたsimulation smootherを適用すると、candidateである$\{\eta_s\}_{s=t}^{t+k}$ をgからサンプリングすることができる。

ここで、テーラー展開を行う点$\{\hat{h}_s\}_{s=t}^{t+k}$の選択であるが、$\{\hat{h}_s\}_{s=t}^{t+k}$ に適当な初期値を選んでやると、(19)式より$\{\hat{\varepsilon}_s\}_{s=t}^{t+k}$が計算できる。そこで、それを使って、(20),(21)式から成る線形

$\{h_s\}_{s=t}^{t+k}$

状態空間モデルに対して平滑化（smoothing）を行うと、　　　の推定値が求まる。それを(19)式の$\{\hat{h}_s\}_{s=t}^{t+k}$に代入すると新たな$\{\hat{e}_s\}_{s=t}^{t+k}$が求まる。今度は、それを使い、(20),(21)式から成る線形状態空間モデルにおいて再び平滑化を行うと、$\{h_s\}_{s=t}^{t+k}$の新たな推定値が求まる。これを数回繰り返して得られる$\{h_s\}_{s=t}^{t+k}$の推定値の下でテーラー展開を行えばよい。

最後に、ブロッキングを行う際、どこで区切るかであるが、Shephard/Pitt (1997)は、区切る点をランダムに選んでいる。具体的には、U_i　を[0,1]の一様分布から選ばれた値とし、

$$k_i = \text{int}\,[T \times \{(i+U_i)/(K+2)\}], \quad i = 1,...,K$$

としている。ここで、int[x]はxに最も近い整数値を表す。このように、ブロックの区切りをランダムに選ぶと、今回のサンプリングで非常に多く棄却されるブロックがあったとしても、次のサンプリングでは、異なるブロックが選ばれるので、棄却が続いてサンプリングが行き詰まってしまうということを排除できる。

以下の実証分析では、このmulti-move samplerを用いている。そこでは、ブロックの数Kは40とし、ブロックの区切りはやはりランダムに選んでいる。ただし、h_0のサンプリングにはsingle-move samplerを使っている。また、最初の9000回は捨て、その後の10000回のサンプリングの結果を使って、各パラメータの平均、平均の標準誤差、95%信用区間を計算している。平均は10000回のサンプリングで得られた値の単純平均である。95%信用区間は、10000回のサンプリングで得られた値をその大きさに従って並べ替え、上から2.5%と下から2.5%に対応する値をとった。MCMC法によってサンプリングされた値には自己相関があるので、平均の標準誤差を計算する際には注意を要する。ここでは、Parzenのウインドウを使って標準誤差の計算を行った。（詳しくは、Shephard/Pitt（1997）を参照のこと。）その際のbandwidthは1000とした。

また、Geweke（1992）に従い、MCMCの収束判定のため、10000回のサンプリングされた値の前半と後半とで平均に有意な差がないかどうかの検定も行っている。具体的には、10000回のサンプリングされた値　$\{q^{(i)}\}_{i-1}^{10000}$のうちの前半の　n_A個　$\{q^{(i)}\}_{i=1}^{nA}$の平均　$\bar{q}_A = (1/n_a)\sum_{i=1}^{nA} q^{(i)}$と、後半の$n_B$個$\{q^{(i)}\}_{10001-n_B}^{10000}$の平均$\bar{q}_B = (1/n_B)\sum_{j=10001-n_b}^{10000} q^{(i)}$を使って、次のようなCD (convergence diagnostic) 統計量を計算した。

$$CD = \frac{\bar{q}_A - \bar{q}_B}{\sqrt{\hat{s}_A^2/n_A + \hat{s}_B^2/n_B}} \tag{22}$$

ただし、$\hat{s}_A^2/n_A, \hat{s}_B^2/n_B$ はそれぞれ$\bar{q}_A - \bar{q}_B$の標準誤差を表し、それらはParzenのウインドウを使って計算した。$\hat{s}_A^2/n_A, \hat{s}_B^2/n_B$を計算する際のbandwidthはそれぞれ100，500とした。また、n_A =1000，　n_B =5000　としている。もし、MCMCが定常分布に収束しているなら、平均に有意な差はないはずで、その場合のCD統計量の漸近分布は標準正規分布である。

4　実証分析

4.1　データ

本研究で用いたデータは、東京工業品取引所で取引されている金、銀、白金、綿糸40単および大阪繊維取引所で取引されている毛糸の計５つの先物の価格および出来高の日次データである。標本期間は、すべて1990年１月４日から94年11月30日までである。標本数は1211である。それぞれの先物市場で日々限月の異なる複数の先物が取引されている。そこで、Bessembinder/Seguin（1993）に従い、限月に入るまでは最も限月の近い先物の価格を、限月に入った場合は次に限月の近い先物の価格を使って、価格変化率（%）を計算している。価格変化率（%）は、価格の対数値の階差をとることにより計算されている。取引高に関しては、単純に、すべての限月のものを合計し、それに10^{-4}を掛けたものを用いている。（これらのデータの基本統計量に関しては、渡部/大鋸（1996）を参照のこと。）

表１には、各商品先物について、価格変化率の２乗の自己相関係数、取引高の１次の自己相関係数、価格変化率の２乗と取引高の相関係数が計算されている。すべて正の値が得られており、過去の研究やDBMモデルと整合的である。

表１：標本相関係数

	金	銀	白金	綿糸40単	毛糸
価格変化率の２乗の１次の標本自己相関係数	0.1851	0.1249	0.1129	0.0469	0.1429
取引高の１次の標本自己相関係数	0.6638	0.6172	0.7141	0.6649	0.6810
価格変化率の２乗と取引高の標本相関係数	0.5593	0.5217	0.3584	0.2340	0.2878

４.２　SVモデルの推定結果

DBMモデルの推定の前に、(8'),(10')式から成るSVモデルの推定を行った。SVモデルの未知のパラメーターは、(f, s_h^2, s_r^2)である。これらのパラメーターの事前分布にもやはりnon-informative priorを仮定した。推定結果は表２にまとめられている。まず、(22)式により計算されたCD統計量の値によると、すべての先物のすべてのパラメーターでMCMCの収束の診断をパスしている。次に、φの事後平均を見てみると、すべての商品先物で１に近い値が得られている。最も１に近いのが白金の0.9729で、最も１から離れている毛糸でも、0.9599である。また、φの95%信用区間も１に近い狭い範囲にかたまっている。例えば、金では、[0.9387，0.9888]である。φの事前分布を[-1,1]の間の一様分布としているにもかかわらず、事後分布の95%信用区間が１に近い狭い範囲にかたまっているということは、すべての商品先物でボラティリティのショックに高い持続性があることを強く示している。

補論Ｂの(Ｂ.1)式は、(8'),(10')式から成るSVモデルの下で、価格変化率の２乗の１次の自己相関係数がどのように表されるかを示したものである。それは、SVモデルのパラメーター(f, s_h^2, s_r^2)の非線型関数となっているので、その分布を導出することは古典的な方法では難しい。しかし、ここで用いているベイズ推定法では、MCMC法によりSVモデルのパラメーターが事後分布からサンプリングされているので、それをただ単に(Ｂ.1)式に代入することにより、価格変化率の２乗の１次の自己相関についても事後分布からサンプリングした値を得ることができる。このようにして得られた値を使って、表２には、価格変化率の２乗の１次の自己相関係数についても、平均、標準偏差、95%信用区間、CD統計量が計算されている。価格変化率の２乗の１次の自己相関係数の95%信用区間が標本から計算される価格変化率の２乗の１次の自己相関係数の値を含んでいるのは金、銀、毛糸である。白金、綿糸40単では、価格変化率の２乗の１次の自己相関係数の95%信用区間が標本から計算される価格変化率の２乗の１次の自己相関係数の値を上回っており、SVモデルが価格変化率の２乗の１次の自己相関係数の値を過大評価してしまっていることがわかる。

表２：SV モデルのベイズ推定

パラメータ	平　均	標準誤差	95%信用区間	CD
金				
ϕ	0.9676	0.0004	[0.9387, 0.9888]	-0.86
σ_η	0.1561	0.0008	[0.1189, 0.2029]	1.18
σ_r	1.0534	0.0038	[0.8735, 1.2047]	-0.60
$\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)$	0.4579	0.0091	[0.2058, 1.0453]	-0.21
$\mathrm{corr}(R_t^2, R_{t-1}^2)$	0.1406	0.0011	[0.0801, 0.2406]	0.41
銀				
ϕ	0.9671	0.0004	[0.9447, 0.9862]	0.03
σ_η	0.1919	0.0010	[0.1566, 0.2344]	-0.57
σ_r	0.8542	0.0051	[0.7011, 0.9760]	1.63
$\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)$	0.6378	0.0204	[0.3524, 1.3022]	-1.03
$\mathrm{corr}(R_t^2, R_{t-1}^2)$	0.1758	0.0017	[0.1219, 0.2595]	-0.94
白金				
ϕ	0.9729	0.0003	[0.9538, 0.9887]	-0.62
σ_η	0.1953	0.0010	[0.1593, 0.2437]	0.62
σ_r	1.1729	0.0055	[0.9956, 1.3482]	0.56
$\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)$	0.7947	0.0083	[0.4337, 1.5702]	-0.08
$\mathrm{corr}(R_t^2, R_{t-1}^2)$	0.2002	0.0010	[0.1424, 0.2766]	-0.01
綿糸40単				
ϕ	0.9687	0.0003	[0.9476, 0.9856]	-0.28
σ_η	0.1865	0.0008	[0.1502, 0.2305]	-0.38
σ_r	1.1350	0.0029	[0.9729, 1.3026]	0.94
$\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)$	0.6166	0.0052	[0.3460, 1.1242]	-1.42
$\mathrm{corr}(R_t^2, R_{t-1}^2)$	0.1748	0.0007	[0.1213, 0.2458]	-1.11
毛糸				
ϕ	0.9599	0.0004	[0.9350, 0.9810]	-0.72
σ_η	0.1788	0.0011	[0.1431, 0.2195]	-0.04
σ_r	1.2833	0.0041	[1.1254, 1.4373]	0.41
$\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)$	0.4404	0.0045	[0.2490, 0.7876]	-1.58
$\mathrm{corr}(R_t^2, R_{t-1}^2)$	0.1409	0.0009	[0.0933, 0.2069]	-1.24

＊ 標準誤差は平均の標準偏差を表し、Shephard/Pitt（1997）に従い、Parzenのウインドーを使って計算したものである。(bandwidthは1000とした。) CD は Geweke（1992）によって提案された MCMC の収束の検定統計量を表し、(22)式を使って計算されたものである。$n_A=1000$, $n_B=5000$ とし、σ_A^2, σ_B^2 は、それぞれ、bandwidth を100, 500として Parzen のウインドウを使って計算した。

４.３　DBMモデルの推定結果

(8'),(10')式から成るDBMモデルの推定結果は表３にまとめられている。ここでも、すべての先物のすべてのパラメーターでMCMCの収束の判定をパスしている。φの事後平均および95%信用区間は、銀以外ではすべて、SVモデルより高めの値が得られている。銀では、逆に、大幅に低下している。

補論Bの(B.2)-(B.5)式は、(8'),(10')式から成るDBMモデルの下で、価格変化率の２乗と出来高の相関係数、価格変化率の２乗の１次の自己相関係数、出来高の１次の自己相関係数がそれぞれどのように表されるかを示したものである。表３にはMCMC法によってサンプリングしたDBMのパラメーターの値を(B.2)-(B.5)式に代入することによって計算した価格変化率の２乗の１次の自己相関係数、出来高の１次の自己相関係数、価格変化率の２乗と出来高の相関係数それぞれの平均、標準偏差、95%信用区間、CD統計量も示されている。価格変化率の２乗の１次の自己相関係数、出来高の１次の自己相関係数、価格変化率の２乗と出来高の相関係数すべてにおいて、95%信用区間がそれらの標本から計算される値を含んでいるのは、毛糸だけである。金では、価格変化率の２乗と出来高の相関係数の95%信用区間が標本相関係数を下回っている。また、銀では、価格変化率の２乗の１次の自己相関係数と価格変化率の２乗と出来高の相関係数の95%信用区間がそれらの標本から計算される値を下回っている。綿糸40単では、価格変化率の２乗の１次の自己相関係数の95%信用区間が標本自己相関係数を上回っている。

表３：DMB モデルのベイズ推定

パラメータ	平　均	標準誤差	95%信用区間	CD
金				
ϕ	0.9867	0.0002	[0.9758, 0.9963]	0.46
σ_η	0.1143	0.0004	[0.0984, 0.1344]	-1.34
σ_r	0.9371	0.0058	[0.8426, 1.0465]	-0.47
μ_v	3.0130	0.0366	[2.4721, 3.6949]	-0.46
σ_v	1.1894	0.0075	[1.0460, 1.3511]	-0.05
$\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)$	0.6679	0.0154	[0.2827 1.6764]	-0.82
$\mathrm{corr}(R_t^2, R_{t-1}^2)$	0.1707	0.0013	[0.1068, 0.2865]	-0.20
$\mathrm{corr}(V_t, V_{t-1})$	0.8275	0.0038	[0.6651, 0.9773]	-0.66
$\mathrm{corr}(R_t^2, V_t)$	0.3807	0.0022	[0.2740, 0.5335]	-0.42
銀				
ϕ	0.6948	0.0029	[0.6495, 0.7450]	-0.52
σ_η	0.3859	0.0003	[0.3703, 0.4025]	0.98
σ_r	0.8817	0.0079	[0.8044, 0.9481]	0.82
μ_v	1.5378	0.0274	[1.2978, 1.7158]	0.79
σ_v	0.0893	0.0010	[0.0716, 0.1080]	1.30
$\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)$	0.2897	0.0030	[0.2503, 0.3448]	-0.10
$\mathrm{corr}(R_t^2, R_{t-1}^2)$	0.0742	0.0009	[0.0624, 0.0901]	-0.28
$\mathrm{corr}(V_t, V_{t-1})$	0.6580	0.0027	[0.6138, 0.7067]	-0.59
$\mathrm{corr}(R_t^2, V_t)$	0.3324	0.0013	[0.3141, 0.3554]	-0.09
白金				
ϕ	0.9891	0.0002	[0.9793, 0.9975]	0.76
σ_η	0.1138	0.0004	[0.0980, 0.1328]	0.24
σ_r	1.5764	0.0146	[1.3683, 1.8180]	1.16
μ_v	0.2726	0.0051	[0.2065, 0.3552]	1.04
σ_v	0.1219	0.0012	[0.1044, 0.1419]	1.12
$\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)$	0.8605	0.0172	[0.3311, 2.4080]	0.18
$\mathrm{corr}(R_t^2, R_{t-1}^2)$	0.1913	0.0017	[0.1209, 0.3108]	0.87
$\mathrm{corr}(V_t, V_{t-1})$	0.8337	0.0050	[0.6522, 0.9876]	1.20
$\mathrm{corr}(R_t^2, V_t)$	0.4039	0.0029	[0.2875, 0.5577]	1.00

表3：(続き)

パラメータ	平　均	標準誤差	95%信用区間	CD
綿糸40単				
ϕ	0.9856	0.0002	[0.9737, 0.9960]	1.01
σ_η	0.0810	0.0004	[0.0673, 0.0966]	-0.28
σ_r	1.3536	0.0054	[1.2394, 1.4897]	1.29
μ_v	0.8024	0.0064	[0.6846, 0.9576]	1.31
σ_v	0.3361	0.0016	[0.3016, 0.3752]	1.35
$\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)$	0.3237	0.0178	[0.1317 0.7560]	-0.02
$\mathrm{corr}(R_t^2, R_{t-1}^2)$	0.1021	0.0006	[0.0568, 0.2083]	1.40
$\mathrm{corr}(V_t, V_{t-1})$	0.6298	0.0031	[0.4334, 0.8987]	1.40
$\mathrm{corr}(R_t^2, V_t)$	0.2563	0.0013	[0.1615, 0.4350]	1.45
毛糸				
ϕ	0.9816	0.0002	[0.9686, 0.9927]	-0.79
σ_η	0.1160	0.0004	[0.0962, 0.1443]	0.50
σ_r	1.4823	0.0097	[1.3269, 1.6502]	-1.05
μ_v	0.1537	0.0020	[0.1252, 0.1872]	-1.11
σ_v	0.0678	0.0004	[0.0593, 0.0765]	-1.41
$\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)$	0.4224	0.0044	[0.2276, 0.8747]	-0.95
$\mathrm{corr}(R_t^2, R_{t-1}^2)$	0.1377	0.0006	[0.0895, 0.2232]	-0.58
$\mathrm{corr}(V_t, V_{t-1})$	0.7229	0.0034	[0.5500, 0.9079]	-0.85
$\mathrm{corr}(R_t^2, V_t)$	0.3217	0.0013	[0.2293, 0.4544]	-0.73

＊ 標準誤差は平均の標準偏差を表し、Shephard/Pitt (1997) に従い、Parzenのウインドーを使って計算したものである。(bandwidthは1000とした。) CD は Geweke (1992) によって提案された MCMC の収束の検定統計量を表し、(22)式を使って計算されたものである。$n_A=1000$, $n_B=5000$ とし、σ_A^2, σ_B^2 は、それぞれ、bandwidthを100, 500として Parzen のウインドウを使って計算した。

5　結　　論

本論文では、Tauchen/Pitts（1983）モデルにおいて、取引回数に自己相関を導入したDBMモデルを取り上げ、それによって日本の商品先物市場における価格と出来高の変動をうまくとらえることができるかどうか実証分析を行った。

結果、DBMモデルによって価格変化率の２乗の１次の自己相関係数、出来高の１次の自己相関係数、価格変化率の２乗と出来高の相関係数すべてをうまく説明できたのは毛糸だけであった。具体的にDBMモデルが何をうまく説明できないかは、商品によって異なっている。金では、価格変化率の２乗と出来高の相関係数がうまく説明できないのに対して、白金と綿糸40単では、価格変化率の２乗の１階の自己相関係数をうまく捉えられなかった。

DBMの実証研究は、他の金融市場ではいくつか行われている。Lamoureux/Lastrapes（1994）はアメリカの株式、Liesenfeld（1998）はドイツの株式、Watanabe（2000）は日経225先物について、それぞれ分析を行い、一貫して、価格変化率の2乗の自己相関を過小評価するという結論を得ている。それと同じ結果が得られているのはここでは銀だけであり、白金と綿糸40単では逆にDBMが価格変化率の２乗の自己相関を過大評価している。

今後は、こうした商品による違い、また他の資産との違いがなぜ生じるのかまで研究を深めてゆく必要がある。

補論Ａ：DBMモデルのパラメーターの条件付分布

DBMモデルのパラメーターの条件付分布は次のように計算される。

1．　$$m_v \,|\, \bullet \sim N\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} V_t}{\sum_{t=1}^{T} \exp(h_t)}, \frac{s_v^{2}}{\sum_{t=1}^{T} \exp(h_t)}\right) I[0,\infty],$$

2．　$$f \,|\, \bullet \sim N\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} h_{t-1} h_t}{\sum_{t=1}^{T} h_{t-1}^2}, \frac{s_h^{2}}{\sum_{t=1}^{T} h_{t-1} h_t}\right) I[-1,1],$$

3．　$$s_r^{-2} \,|\, \bullet \sim \mathrm{gamma}\left(\frac{T}{2}, \frac{2}{\sum_{t=1}^{T} R_t^2 \exp(-h_t)}\right),$$

4．　$$s_v^{-2} \,|\, \bullet \sim \mathrm{gamma}\left(\frac{T}{2}, \frac{2}{\sum_{t=1}^{T} (V_{t-m_t} \exp(h_t))^2 \exp(-h_t)}\right),$$

5．　$$s_h^{-2} \,|\, \bullet \sim \mathrm{gamma}\left(\frac{T}{2}, \frac{2}{\sum_{t=1}^{T} (h_t - f h_{t-1})^2}\right).$$

補論B：価格変化率の２乗と取引高の相関係数および自己相関係数

ＳＶモデル、DBMモデル、拡張したＤＢＭモデルにおける価格変化率の２乗と取引高の相関係数および自己相関係数は以下の通りである。導出には、$x \sim N(\mu, \sigma^2)$であれば、$\mathrm{E}(X^r) = \exp(r\mu + r^2\sigma^2/2)$であることを使えばよい。

SV Model

$$\mathbf{corr}(R_t^2, R_{t-1}^2) = \frac{\exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{1-\phi}\right] - \exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right]}{3\exp\left[\dfrac{2\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right] - \exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right]}. \qquad \text{(B.1)}$$

DBMモデル

$$\mathbf{corr}(R_t^2, R_{t-1}^2) = \frac{\exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{1-\phi}\right] - \exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right]}{3\exp\left[\dfrac{2\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right] - \exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right]}, \qquad \text{(B.2)}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{corr}(V_t, V_{t-1}) \\
&= \frac{\mu_v^2\left(\exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{1-\phi}\right] - \exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right]\right)}{\mu_v^2\left(\exp\left[\dfrac{2\sigma_h^2}{1-\phi}\right] - \exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right]\right) + \sigma_v^2\exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{2(1-\phi^2)}\right]},
\end{aligned} \qquad \text{(B.3)}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{corr}(R_t^2, V_t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3\exp\left[\dfrac{2\sigma_h^2}{1-\phi}\right] - \exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right]}} \\
&\times \frac{\mu_v\left(\exp\left[\dfrac{2\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right] - \exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right]\right)}{\sqrt{\mu_v^2\left(\exp\left[\dfrac{2\sigma_h^2}{1-\phi}\right] - \exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{1-\phi^2}\right]\right) + \sigma_v^2\exp\left[\dfrac{\sigma_h^2}{2(1-\phi^2)}\right]}}.
\end{aligned} \qquad \text{(B.4)}$$

【参考文献】

渡部敏明（2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店。

渡部敏明・大鋸崇（1996)「日本の商品先物市場における価格のボラティリティと出来高および取組高との関係」『先物取引研究』第２巻第３号 No.4、41-56。

Andersen, T. G. (1996), "Return Volatility and Trading Volume in Financial Markets : An Information Flow Interpretation of Stochastic Volatility", *Journal of Finance*, 51, 169-204.

Bessembinder, H., and Seguin, P. J. (1993), "Price Volatility, Trading Volume, and Market Depth : Evidence from Futures Markets", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*,28, 21-39.

Clark, P. (1973), "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Process", *Econometrica*, 41, 135-155.

de Jong, P., and Shephard, N. (1995), "The Simulation Smoother for Time Series Models",*Biometrika*, 82, 339-350.

Gamerman, D. (1997), *Markov Chain Monte Carlo*, Chapman & Hall.

Geweke, J. (1992), "Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments", in J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid, and A.F.M.Smith (eds) *Bayesian Statistics 4*, Oxford University Press, 169-193.

Ghysels, E., Harvey, A.C., and Renault, E. (1996), "Stochastic Volatility", in G.S. Maddala and C.R. Rao (eds) *Handbook of Statistics 14*, North-Holland, 119-191.

Gilks, W.R., Richardson, S., and Spiegelhalter, D.J. (1996), *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman & Hall.

Karpoff, J.M. (1987), "The Relation between Price Changes and Trading Volume : A Survey", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 109-126.

Lamoureux, C.G. and Lastrapes, W.D. (1994), "Endogenous Trading Volume and Momentum in Stock-Return Volatility", *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, 253-260.

Liesenfeld, R. (1998), "Dynamic Bivariate Mixture Models : Modeling the Behavior of Prices and Trading Volume", *Journal of Business & Economic Statistics*, 16, 1

01-109.

Richardson, M., and Smith, T. (1994), "A Direct Test of the Mixture of Distributions Hypothesis : Measuring the Daily Flow of Information", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, 101-116.

Shephard, N. (1996), "Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility", in D.R. Cox, D.V. Hinkley, and O.E. Barndorff-Nielsen (eds) *Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields*, Chapman & Hall, 1-67.

Shephard, N., and Pitt, M.K. (1997), "Likelihood Analysis of Non-Gaussian Measurement Time Series", *Biometrika*, 84, 653-667.

Tauchen, G.E. and Pitts, M. (1983), "The Price Variability-Volume Relationship on Speculative Markets", *Econometrica*, 51, 485-505.

Tierney, L. (1994), "Markov Chains for Exploring Posterior Distributions (with Discussion)", *Annals of Statistics*, 21, 1701-1762.

Watanabe, T. (2000) "Bayesian Analysis of Dynamic Bivariate Mixture Models : Can They Explain the Behavior of Returns and Trading Volume ?", *Journal of Business & Economic Statistics, forthcoming.*