市場間の情報ギャップと市場の安定性*

高　橋　　一
一橋大学大学院経済学研究科
2001 年８月

アブストラクト
　本小論では Takahashi (2000)に基づき、株式市場とオプション市場の間で繰り広げられる裁定取引に基づく価格安定機構が機能する場合としない場合を市場間で交換される情報の完全性を梃子に考察する。市場が安定的であるか否かは両市場に於ける将来のボラティリィティー予測に依存することを示す。

§1　序

　ブラック・ショールズの先駆的な論文が発表されて以来、ヨーロッパ型オプションの価格は市場に於ける無裁定の仮定のもとで、原資産価格、ボラティリティー、それと安全利子率から計算される。本論文では簡単のために株式に対するヨーロッパ型コールオプションに限定する。また、我々の考える経済社会は株式市場とオプション市場の２市場から成るものとしよう。
　派生証券という言葉は語源的に見ればその価値が原資（株式）の価値に依存すると言うことから来ている。これまで発表された殆ど全ての派生証券価格理論ではオプション価格は株価と将来のボラティリティーの関数であると暗黙のうちに仮定してきている（Cf. Black and Scholes (1973), Merton (1973), Harrison and Kreps (1979), Harrison and Pliska (1981)）。派生証券取引の泰明期には派生証券の取引量は原証券の取引量と比べ格段に小さく、派生証券市場が株式市場へ与える影響は無視できるほどのものであった。しかし、1980 年代中盤より派生証券の取引量は著しく増加し派生証券市場から株式市場への影響も無視できなくなってきた。そこで、先ず、この問題に関する理論的考察が必要となってきた。本論文で我々は株式市場

*　本稿は Takahashi (2000)の翻訳をベースに書かれている。また、本研究は日本商品先物振興協会からの研究助成金により斯波恒正氏と行った共同研究に基づいている。
　斯波氏と著者は同協会からの援助に深く感謝の意を表するものであります。

とオプション（派生証券）市場との間の対称関係を特に考察する。即ち、オプション市場に於ける株価の理論値がオプションの市場価格へ与える影響を考察する。ここでは株式価格はオプション価格と将来のボラティリティーの関数であると仮定し株価の理論値を求めることが出発点である。これは株式市場においてオプションの理論値が株の市場価格（真の価格）へ与える影響を考察することへの双対問題とも言えよう。

以下の各節において、もしも両市場が将来の株価の分布に関し”完全情報”を持つならば裁定取引により市場は以下に述べる意味において機能的に”安定的”であることを示す。そこで、本論文に於ける”完全情報”を以下の形に定式化する。安定性については次節で定義しよう。

[定義１]　もしも株式市場とオプション市場双方が将来の株価過程の分布に関し同じ予想を持つとき両市場は強い意味の完全情報を持つという。またこの時、両市場は強い意味の完全情報下にあるという。

[補足１]　次節で我々は無裁定条件下でオプションと株価の理論値を二項二期間株価モデルのもとで求める。この時真の確率はボラティリティーの決定のみに関わりオプションの理論値や株価の理論値の価格決定には直接関係しない。その意味で[定義１]の完全情報の仮定は強すぎ弱めることも可能であるが、簡単化の為このままで議論することとする。より弱い仮定は§3 で連続時間モデルを考察するときに再び考えることとする。

ブラック・ショールズの理論では原資産のボラティリティーが中心的な役割を果たすが、ここで問題となるボラティリティーは過去や現在のものではなく現時点から満期日までの間のボラティリティーである。従って、それは市場のトレーダー達により予測されなければならないという意味において市場が持っている株価に関する将来予測に強く依存する。（当たり前のことであるが、ボラティリィティーはそれが一定という条件のもとで始めて過去のデータより推定できる。ヒストリカルボラティリィティーが果たして何処まで意味を持つのかということである。）

以下の各節で不完全情報の仮定下においては市場を均衡状態へ導くメカニズムが働かず、ワイルドな価格変動が生じる可能性が高くなることを示す。そこで指摘される問題は特にコンピューター取引等により著しく増幅され、市場が大きな混乱に包まれることがあり得るだろう。

§2　二項モデル

本節では、二期間二項株価モデルのもとで市場間の情報ギャップの影響を考察する。ここでは現時点は $t=0$, 将来時点は $T=1$ とし、安全利子率は $r\ (\geqq 0)$ と書くことにしよう。以上の準備のもとに、まず、株式市場で原株に対する満期 $T=1$, 行使価格 K のヨーロッパ型コールオプションの時点 $t=0$ における理論価格を $\mathbb{C}_0$ と書く。また、S_0 を株式市場で決定される時点 $t=0$ の真の株価とする。時点 $T=1$ で株価は確率 $p\ (0<p<1)$ で $S_1^{(u)}$ に上昇

するか、確率 1-p で $S_1^{(d)}$ に下降する ($S_1^{(u)} > S_1^{(d)}$)。言うまでもないが、時点T ＝1 におけるオプション価値は株価が上昇したときには $C_1^{(u)} = \max\{S_1^{(u)} - K, 0\}$、逆に下降したときには $C_1^{(d)} = \max\{S_1^{(d)} - K, 0\}$となる。また、安全利子率 r については利子率と株式との間の裁定を排除するために

(1) $$d = S_1^{(d)} / S_0 \leqq 1 + r \leqq S_1^{(u)} / S_0 = u$$

を仮定する。時点T＝１の株価 $S_1^{(\cdot)}$ が具体的に取りうる値は市場に於ける将来のボラティリィティー予測を反映している。例えば、市場に於けるボラティリィティー予測値が大きいほど $S_1^{(u)} - S_1^{(d)}$ は大きくなる。株式市場に於ける株価は市場のトレーダーにより決定され、同時にオプション価値の時点T＝１における予測値 C_0はこの株式予測値により決定される。((2)式参照)。

一方、時点 t ＝0 における実際のオプション価格 C^*_0はオプション市場のトレーダーが決定する。彼らは彼ら自身の将来（T＝１）の株価予測に基づきオプション価格を決定することになる。彼らの時点T＝１における株価予測は、確率 $0 < p^* < 1$ で上昇して $S^{*(u)}_1$ となり、確率 $1 - p^*$ で $S^{*(d)}_1$ へと下降する。従って、時点T＝１におけるオプション価値は株価が $S^{*(u)}_1$ へ上昇したときには $C^{*(u)}_1 = \max\{S^{*(u)}_1 - K, 0\}$、一方 $S^{*(d)}_1$ へ下降したときには $C^{*(d)}_1 = \max\{S^{*(d)}_1 - K, 0\}$となる。これらより、株式市場でオプションの理論値を求めるのと全く同様にして、オプション市場では逆に株価の理論値 $\mathbb{S}^*_0$を求めることが出来る。この対称性が本論文に於ける我々の分析の出発点である。この様な議論の背景には以下のような素朴な考察があることを述べておこう。

「もしも株式とオプションが別々の市場で取り引きされるならば、両市場が同じ情報を共有している保証は無く、従って株価分布の将来予測も異なりうる。一方、最終的には例え同じ情報を持つとしても情報交換のためにある一定の時間（例えば１マイクロ秒）が必要とされる。従って、一般には $S_1^{(u)} = S^{*(u)}_1$, $S_1^{(d)} = S^{*(d)}_1$, $p = p^*$を仮定することは出来ず、将来のボラティリティ予測も市場毎に異なる。」

さて、株式市場においてオプションの理論（無裁定）価格は同値ポートフォリオを考えることにより以下のように求められる (Cf.. Cox, Ross and Rubinstein (1979))。

(2) $$\mathbb{C}_0 = \{qC_1^{(u)} + (1-q)\, C_1^{(d)}\} / (1+r),$$

但し、$q = [(1+r)\, S_0 - S_1^{(d)}] / [S_1^{(u)} - S_1^{(d)}] = [(1+r) - d] / (u - d)$ は株式市場のマルチンゲール測度である ([図 1]参照)。 同様にしてオプション市場に於ける株価の理論値は

(3) $$\mathbb{S}^*_0 = \{q^* S^{*(u)}_1 + (1-q^*) S^{*(d)}_1\} / (1+r)$$

但し、 $q^* = [(1+r)\, C^*_0 - C^{*(d)}_1] / [C^{*(u)}_1 - C^{*(d)}_1]$ はオプション市場に於けるマルチンゲール測度である ([図 2]参照)。

【図1】

【図2】

もしも、株式市場においてオプションの理論値 $\mathbb{C}_0$が市場価格 C^*_0 より高ければ投資家は次の投資戦術を用いることにより裁定利益を上げることが可能である。

[投資戦術]　C^*_0でオプションを１単位買うと同時にα単位の株式の空売りと利子率ｒでＢ円を借りるポートフォリオを売る、但し、

(4) $\alpha = [C_1^{(u)} - C_1^{(d)}] / [S_1^{(u)} - S_1^{(d)}]$,

(5) $B = [C_1^{(d)} S_1^{(u)} - C_1^{(u)} S_1^{(d)}] / [(1+r)(S_1^{(u)} - S_1^{(d)})]$

である。
所で、時点ｔ＝0 における本ポートフォリオの価値は $\mathbb{C}_0$に等しく、トレーダーは $\mathbb{C}_0 - C^*_0$ という利益を上げることが出来る。そして、時点Ｔ＝1 では両者の価値は等しいことからコストゼロでポジションを閉めることが出来るので、これは裁定機会である。これよりオプション価格は上昇、株式価格は下落する。ここまでの話はファイナンスの初等的な教科書にあるとおりであるが本論文のポイントはこれと同じことをオプション市場でも考えることにある。
　さて、オプション市場では真の時点ｔ＝0 オプション価格 C^*_0が与えられている。ここでも上と同様 $\mathbb{C}_0 \geqq C^*_0$ を仮定しておく。もしも、 理論（無裁定）株式価格 $\mathbb{S}^*_0$が真の株価より低いとき（$\mathbb{S}^*_0 \leqq S_0$）には株を売りオプションを買う投資戦術がオプション市場で取られる。実際、１株の売りと、α’単位のオプションと債権Ｂ’円より成るポートフォリオの組み合わせで裁定利益を得ることができる、但し、

(4') $\alpha^* = [S^*{}_1^{(u)} - S^*{}_1^{(d)}] / [C^*{}_1^{(u)} - C^*{}_1^{(d)}]$

(5') $B^{*} = [C^{*}{}_{1}{}^{(d)}S^{*}{}_{1}{}^{(u)} - C^{*}{}_{1}{}^{(u)}S^{*}{}_{1}{}^{(d)}] / [(1+r)(C^{*}{}_{1}{}^{(u)} - C^{*}{}_{1}{}^{(d)})]).$

である。結果としてオプション市場でも株価は下がり、オプション価格は上昇することにより株式市場と同じ方向で価格調整が進み最後には均衡価格へ収束することになる。

問題は理論価格 $\mathbb{S}^{*}{}_{0}$が市場価格よりも高いとき（$\mathbb{S}^{*}{}_{0} \geqq S_{0}$）で、この時オプション市場のトレーダーは株の買いとオプションの売りを含むポートフォリオにより裁定利益を得ようとする。それによりオプション市場では株価に対し上げの圧力が、オプションに対しては売りの圧力が生まれる。即ち、オプション市場に於ける価格調整プロセスは株式市場とは逆方向に進む。もしも、いずれかの市場の取引量が他方のそれを凌駕する状況にあれば、優勢な市場に於ける価格調整プロセスに基づき均衡状態を達成できるが、両者が拮抗状態にあるときには市場間の衝突により株価、及びボラティリィティーの動きは非常に不安定なものと成るであろう。そこでこの様な市場のダイナミックな安定性を ”市場の安定性” という概念として以下で定義しよう。

[定義２]株式市場とオプション市場の双方で、

(6)
$$\mathbb{C}_{0} \geqq C^{*}{}_{0} \text{ ならば } S_{0} \geqq \mathbb{S}^{*}{}_{0}$$
または
$$\mathbb{C}_{0} \leqq C^{*}{}_{0} \text{ ならば } S_{0} \leqq \mathbb{S}^{*}{}_{0}$$

が常に成立するとき、両市場は安定状態にあるという。または単に安定的であるという。

次に両市場が安定的であるための十分条件を与える。

[補題１]　株式価格は二項二期間モデルに従うとする。もしも、オプション市場と株式市場が強い意味の完全情報の状態にあるならば両市場は安定的である。即ち、両市場に於ける価格調整機構は整合的である。

証明．完全情報の仮定下では $S^{*}{}_{1}{}^{(u)} = S_{1}{}^{(u)} = uS_{0}$，　$S^{*}{}_{1}{}^{(d)} = S_{1}{}^{(d)} = dS_{0}$ と仮定できることより、$C^{*}{}_{1}{}^{(u)} = C_{1}{}^{(u)}$，　$C^{*}{}_{1}{}^{(d)} = C_{1}{}^{(d)}$，そして

(7) $$\mathbb{S}^{*}{}_{0} = \{q^{*}uS_{0} + (1-q^{*})\, dS_{0}\} / [1+r],$$

が成立する、ただし、$q^{*} = [(1+r)\, C^{*}{}_{0} - C^{*}{}_{1}{}^{(d)}] / [C^{*}{}_{1}{}^{(u)} - C^{*}{}_{1}{}^{(d)}]$。
ここでもしも、$\mathbb{C}_{0} \geqq C^{*}{}_{0}$であれば

(8) $$q^{*} \leqq [(1+r)\,\mathbb{C}_{0} - C_{1}{}^{(d)}] / [C_{1}{}^{(u)} - C_{1}{}^{(d)}] = q$$

が成り立つ。したがって、

$$\mathbb{S}^*_0 \leqq \{quS_0 + (1-q)\, dS_0\}/[1+r] = S_0.$$

完全情報の仮定は一般には強すぎる、そこで以下では安定的な市場が成立するためのより弱い条件を数値例を通じて考えてみる。その為に先ず、オプション市場では $\mathbb{S}^*_0 \geqq S_0$を仮定しておく。オプション価格は株価の増加関数であるため通常は $C^*_0 \geqq \mathbb{C}_0$が成立するように見えるが、それは同時にボラティィリィティーの増加関数でもある。その為株式市場に於ける期待ボラティリティーがオプション市場に比べ有意に大きければ逆の関係 $C^*_0 \leqq \mathbb{C}_0$ が成立しうる。以下やや人工的な数値例を通じこの事実を考察する。

[例１] 以下安全利子率をｒ＝0.1 と仮定する。ここでは時点１を満期日、行使価格Ｋ＝150 円のコールオプションについて考えよう。株式市場における現時点ｔ＝0 での株価は 180 円、時点Ｔ＝１の予想株価は 270 円または 90 円であるとしよう。これより、マルチンゲール測度は q = (180 x 1.1 - 90) / (270 - 90) = 0.6 となり、 $\mathbb{C}_0$ = (1/1.1) (0.6 x 120) = 65.45 (円)である。([図 3]参照)。

[図 3]

	$S_1^{(u)}$ = 270 円		$C_1^{(u)}$ = 120 円
S_0 =180 円		$\mathbb{C}_0$ =(65.45 円)	
	$S_1^{(d)}$ = 90 円		$C_1^{(d)}$ = 0 円

次にオプション市場における理論（無裁定）株価決定を２つの場合について考える。第一のケースではオプション市場のボラティィリティー予測が株式市場よりも若干小さい場合。第二のケースでは有意に小さな場合を想定する。

[ケース 1] 時点１の株価に関するトレーダーの予測値は 263.25 円と 92.25 円とする。更にオプション市場におけるオプションの実際の価格は 63 円で株式市場に於ける理論値 $\mathbb{C}_0$ = (65.45)円より安いとしよう。オプション市場のマルチンゲール測度 q^* = (63x1.1-0)/(113.25-0) = 0.612。従って株価の理論値は $\mathbb{S}_0{}^*$= (1/1.1){263.25x0.612+ 92.25x0.388} = 178.90 円で 180 円以下であるため、価格調整プロセスは機能する（ [図 4]参照）。

[図 4]

$S^{*}{}_1{}^{(u)}$ = 263.25 円 $C^{*}{}_1{}^{(u)}$ = 113.25 円

$\mathbb{S}^{*}{}_0$ = (178.90 円) $C^{*}{}_0$ = 63 円

$S^{*}{}_1{}^{(d)}$ = 92.25 円 $C^{*}{}_1{}^{(d)}$ = 0 円

[ケース２] 時点Ｔ＝１のボラティリティー予測が株式市場より大幅に小さいケースを考えるために株価が 243 円と 99 円を取ると仮定してみよう。このとき満期日のオプション価値は 93 円と 0 円となるので、時点ｔ＝0 の真のオプション価格 63 円から、本市場に於けるマルチンゲール測度は q^{*}= (63 x 1.1 - 0) / (93 - 0) = 0.745 となる。故に、株価の理論値は $\mathbb{S}_0{}^{*}$ = (1/1.1) {243 x 0.745 + 99 x 0.255}= 187.54（円）で、これは 180 円を超えてしまう。この時、価格調整プロセスは非安定的である。（[図 5]参照)。

[図 5]

$S^{*}{}_1{}^{(u)}$ = 243 円 $C^{*}{}_1{}^{(u)}$ = 93 円

$\mathbb{S}^{*}{}_0$ = (187.54 円) $C^{*}{}_0$ = 63 円

$S^{*}{}_1{}^{(d)}$ = 99 円 $C^{*}{}_1{}^{(d)}$ = 0 円 //

以上の数値例より市場の安定性はボラティリティーの予測値に依存していることが判る。この事実は次の補足と共に、次節において利用される。

[補足２] (3)式より無裁定株式価格（株価の理論値）$\mathbb{S}^{*}{}_0$は以下の方程式を $\mathbb{S}^{*}{}_0$について解いた解ともなることが判る。

(9) $$C^{*}{}_0 = \{q^{*}C_1{}^{*(u)} + (1-q^{*})\, C_1{}^{*(d)}\} / (1+r)$$

但し、 $q^{*}= [(1+r)S^{*}{}_0 - S^{*}{}_1{}^{(d)}] / [S^{*}{}_1{}^{(u)} - S^{*}{}_1{}^{(d)}]$。
即ち、 $S^{*}{}_0$ はオプション価格 $C^{*}{}_0$が与えられたときのインプライド株式価格である。また、この事実は次節で連続型モデルを考察するときにフルに利用される。

もしも、 $S_1{}^{(u)} - S_1{}^{(d)}$ が $S_1{}^{*(u)} - S_1{}^{*(d)}$より有意に大きいときには $\mathbb{C}_0 > C^{*}{}_0$ かつ $S_0 < S^{*}{}_0$ となり得ることを示すことは容易である。 以下簡単化のため r = 0 を仮定しよう。(2) と(9)より、

(10) $S_0 = \{[S_1^{(u)} - S_1^{(d)}]\mathbb{C}_0 + S_1^{(d)}\ C_1^{(u)} - S_1^{(u)}\ C_1^{(d)}\} / \{C_1^{(u)} - C_1^{(d)}\}$,

(11) $\mathbb{S}^*_0 = \{[S^*{}_1^{(u)} - S^*{}_1^{(d)}]\,C^*_0 + S^*{}_1^{(d)}\ C^*{}_1^{(u)} - S^*{}_1^{(u)}\ C^*{}_1^{(d)}\} / \{C^*{}_1^{(u)} - C^*{}_1^{(d)}\}$

ここで、仮定よりあるε>0 とη>0 が存在して、$A = [S_1^{(u)} - S_1^{(d)}] = [S^*{}_1^{(u)} - S^*{}_1^{(d)}] + \varepsilon$, $a = \{C_1^{(u)} - C_1^{(d)}\} = \{C^*{}_1^{(u)} - C^*{}_1^{(d)}\} + \eta$ と書くことが出来る。故に、
$S_0 < \mathbb{S}^*_0$ と同値な条件は(10),(11)より、

$$\{A\mathbb{C}_0 + S_1^{(d)}C_1^{(u)} - S_1^{(u)}C_1^{(d)}\} / a$$
(12)
$$< \{(A+\varepsilon)C^*_0 + S^*{}_1^{(d)}C^*{}_1^{(u)} - S^*{}_1^{(u)}C^*{}_1^{(d)}\}/(a+\eta)$$

ここで、例え $\mathbb{C}_0 > C^*_0$ であっても、十分大きなε（従って十分大きなη,しかしε程は大きくない）に対し$[S_1^{(d)}\ C_1^{(u)} - S_1^{(u)}\ C_1^{(d)}]$ も $[S^*{}_1^{(d)}\ C^*{}_1^{(u)} - S^*{}_1^{(u)}\ C^*{}_1^{(d)}]$ より有意に小さくなり(12)が成立する。また、εの大きさはボラティリティー予測の差に対応している。

ここまで、我々は市場に於けるボラティリティー予測の差異が市場を混乱させることを発見的、定性的にな方法で考察してきたが、これを定量的に明らかにするにはパラメータ値ごとの数値計算が必要であろう。

§3 連続時間モデル

本節では株価過程は幾何ブラウン運動に従うと仮定する。株式市場とオプション市場におけるドリフトとボラティリティーの予測値をそれぞれ (μ,σ) と (μ^*,σ^*)とする。従って、それぞれの市場に於ける株価確率過程は

(13) $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, $S_0 = s$ (株式市場）

(14) $dS^*_t = \mu^* S^*_t dt + \sigma^* S^*_t dW_t$, $S^*_0 = s$ (オプション市場)

で与えられる。また、安全利子率はｒとするが以下では連続複利を使うものとする。以上の準備のもとに、本株式に対する行使価格Ｋ円、行使日Ｔのヨーロッパ型コールオプションを考える。

ブラック・ショールズの公式により株式市場においてはオプションの理論値 $\mathbb{C}_t$ は、

(15) $\mathbb{C}_t = S_t\,\Phi(h) - e^{-r(T-t)}K\Phi(h - \sigma(T-t)^{1/2})$,

但し、Φ は標準正規分布の分布関数、また

(16) $h = \{\log(S_t/Ke^{-r(T-t)}) + (\sigma^2/2)(T-t)\}/\{\sigma(T-t)^{1/2}\}$。

前節と同様、株式市場において、もしも実際のオプション価格 C^*_tが理論値 $\mathbb{C}_t$と異なれば裁定機会が生じる。例えば $\mathbb{C}_t > C^*_t$であれば株式の売却とオプションの買いよりなる投資戦術により裁定利益を得ることができる。

オプション市場ではオプションの市場価格 C^*_tを所与として時点 t における無裁定株式価格 $\mathbb{S}^*_t$（株価の理論値）は次の方程式を $\mathbb{S}^*_t$について解くことにより求めることが出来る。

(17) $C^*_t = \mathbb{S}^*_t\,\Phi(h^*) - e^{-r(T-t)}K\Phi(h^* - \sigma^*(T-t)^{1/2})$,

但し、

(18) $h^* = \{\log(\mathbb{S}^*_t/Ke^{-r(T-t)}) + (\sigma^{*2}/2)(T-t)\} / \{\sigma^*(T-t)^{1/2}\}$。

オプション市場でトレーダーは株式の理論値 S^*_tと実際の値 S_tとを比べ、もしも $S_t > \mathbb{S}^*_t$であれば株式の売りと、オプションの買いからなる投資戦術を取り裁定利益を得ようとする。もしも、ここで $S_t > \mathbb{S}^*_t$ and $\mathbb{C}_t < C^*_t$であれば前節同様市場が不安定状態に陥る（定義２参照）。勿論、完全情報の仮定が満たされていれば両市場では同じ株価過程が仮定されるため $S_t = \mathbb{S}^*_t$となり、$\mathbb{C}_t = C^*_t$であるため市場は安定的である。しかし、安定状態はより弱い仮定下でも得られる。その為に弱い意味の完全情報を定義する。

[定義３]　もしも株式市場とオプション市場の将来のボラティティー予想が一致するとき（$\sigma^2 = \sigma^{*2}$）両市場は弱い意味の完全情報を持つという。この時両市場は弱い意味の完全情報下にあるという。

ボラティリィティーが一定のときオプション価格は株価の増加関数であることより、もしも市場が弱い意味の完全情報下にあれば $\mathbb{C}_t \geqq C^*_t$と $S_t \geqq \mathbb{S}^*$とは同値である。これより次の補題は簡単に示される。

[補題２]　株価確率過程が(13),(14)式で与えられるとする。もしも両市場が弱い意味の完全情報下にあれば市場は安定的である。

市場が弱い意味の完全情報下にないとき、次の状況下で市場が不安定状態になりうる。例えば、$\mathbb{C}_t > C^*_t$ かつ $\sigma^2 > \sigma^{*2}$ または $\mathbb{C}_t < C^*_t$ かつ $\sigma^2 < \sigma^{*2}$ という状況である。前者の場合 $S_t < \mathbb{S}^*_t$ (そして、$\mathbb{C}_t > C^*_t$)となる可能性がある。一方、後者では $S_t > \mathbb{S}^*_t$ ($\mathbb{C}_t < C^*_t$)である。両者とも裁定取引に基づく市場安定メカニズムは働かなくなる可能性がおきる。安定状態が得られる$(S_t, \mathbb{S}^*_t, \sigma^2, \sigma^{*2})$の範囲を解析的に求めることは困難であるが、

しかし数値的に求めることは可能である。

【参考文献】

[1] Black, F. and M. Sholes (1973). "The pricing of options and corporate liabilities." *Journal of Political Economy* 81, 637-654.

[2] Cox,J.C., S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach." *Journal of Financial Economics*, 3, pp.229-263.

[3] Harrison, J.M. and D. Kreps (1979). "Martingales and arbitrage in multiperiod securities market." *Journal of Economic Theory* 20, 381-408.

[4] Harrison, J.M. and S. Pliska (1981). "Martingale and stochastic Integrals in the theory of continuous trading." *Stochastic Processes and Their Applications* 11, 215-260.

[5] Merton, R. (1973). "The theory of rational option pricing." *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183.

[6] Milgrom, P and N. Stokey (1982). "Information, trade and common knowledge." *Journal of Economic Theory* 26, 17-27.

[7] Takahashi, H (2000). "A Note on Interaction Between Markets." *Asia-Pacific Financial Markets* 7, 179-188.