

# 商品先物市場における マーケットマイクロストラクチャー理論

棚 橋 隆 彦  
尹 熙 元  
斉 藤 英 雄  
美 里 晋 一

## Computational Market Dynamicsの提案

1. 緒 言
2. CMDの体系
  - (1) 研究分野の構成
  - (2) CFDとの対比
3. 基礎方程式の誘導について
  - (1) テクニカル分析の拡張
  - (2) Black-Scholes偏微分方程式の拡張
  - (3) 局所価格構成機構を考慮した誘導
  - (4) 三つの誘導例の比較
4. モデル化における適合性
5. 結 言

## Black-Scholes方程式の改良と拡張方法

1. はじめに
  - Black-Scholes 方程式に対する疑問
2. Black-Scholes方程式を改良する根拠
  - 2.1 伊藤過程との矛盾
  - 2.2 特性速度
3. 派生商品に対する新しい偏微分方程式
  - 3.1 Black-Scholesモデル
  - 3.2 棚橋-尹モデル
4. 対数空間での偏微分方程式
  - 4.1 変数変換
  - 4.2 移流拡散方程式
5. 厳密解の誘導
6. 棚橋 - 尹モデルの特性

- 6.1 ボラティリティスマイル
- 6.2 インポライドミュー
- 6.3 Black-Scholesモデルにおける波及性
- 6.4 物理現象としての解釈
- 7. おわりに
  - 7.1 結 言
  - 7.2 今後の解析について

## Three Bodies Trading Model in Financial Markets and Its Numerical Simulation Methodology with Genetic Algorithms

### Abstract

- 1 . Introduction.
- 2 . Proposed Model.
- 3 . Advantages and Performance of the Model.
- 4 . Numerical Simulation Methodology and Capability of Forecasting.
- 5 . Results and Discussions.
- 6 . Conclusion.
- 7 . Reference.

## 金融工学における移流拡散型方程式の数値解析

### 第1章 緒 言

- 1.1 研究背景
- 1.2 Black-Scholes方程式と従来の研究
- 1.3 本研究の目的

### 第2章 金融派生商品

- 2.1 デリバティブ
- 2.2 オプション
- 2.3 エキゾティックオプション

### 第3章 Black-Scholes方程式

- 3.1 価格の変動
- 3.2 伊藤のレンマ
- 3.3 Black-Scholes方程式の導出

### 第4章 トレンド $\mu$ の考慮

- 4.1 仮 定
- 4.2 特性速度
- 4.3 トレンド $\mu$ の考慮
- 4.4 対数空間

### 第5章 多次元化

- 5.1 相 関
- 5.2 n次元Black-Scholes方程式
- 5.3 対数空間
- 第6章 離散化
  - 6.1 時間進行法
  - 6.2 空間の離散化
- 第7章 解析モデル
  - 7.1 1次元モデル
    - 7.1.1 Case 1
    - 7.1.2 Case 2
  - 7.2 2次元モデル
    - 7.2.1 Case 3
    - 7.2.2 Case 4
  - 7.3 初期条件
  - 7.4 境界条件
  - 7.5 解析条件
  - 7.6 メッシュ
  - 7.7 計算の安定性
- 第8章 解析結果と検討
  - 8.1 解析結果
    - 8.1.1 Case 1の結果
    - 8.1.2 Case 2の結果
    - 8.1.3 Case 3の結果
    - 8.1.4 Case 4の結果
  - 8.2 検 討
    - 8.2.1 Case 1における検討
    - 8.2.2 Case 2における検討
    - 8.2.3 Case 3における検討
    - 8.2.4 Case 4における検討
  - 8.3 無次元化
- 第9章 結 言
  - 9.1 結 言
  - 9.2 今後の課題
- 付録A 有限要素法
- 付録B Black-Scholes方程式の厳密解の誘導
- 付録C プログラムリスト

# Computational Market Dynamicsの提案

尹 熙 元<sup>1)</sup>  
棚 橋 隆 彦<sup>2)</sup>

We mainly use parabolic differential equation in financial engineering, because the price movement in the market is described as diffusion phenomenon generally. However it could be recognized that diffusion is not only factor for it, so that the other methodology to apply description of the price movement is expected. In this paper, we suggest new field in financial engineering, which is CMD (Computational Market Dynamics). CMD is close to CFD (Computational Fluid Dynamics) in term of analyzing methodology and simulation theory. CMD will be able to show market dynamism by high accuracy, faster and generalized simulation from CFD concept.

**Key Words** : CMD, CFD, *Advection-Diffusion equation*, *Financial engineering*

## 1. 緒 言

金融工学分野において用いられる方程式の多くは放物型偏微分方程式である。それは市場における基礎的要素である変動を拡散現象として捕らえていることに起因する。しかしながら、資産価格の変動が単なる拡散現象のみに起因するわけではないことは周知の事実であり、それに対応するべく統計手法を駆使した時系列分析等の取り組みがなされている。また、最近着目されつつあるマーケットマイクロストラクチャー理論 [1]によって情報の数値化による価格変動特性の分析がなされ始めており市場構造解析が主題になりつつある。しかしそれらも大半は従来の確率微分方程式にオペレーティングリサーチの概念を導入するというものに止まっているのが現状である。

本論文では拡散現象とトレンドという現在の金融工学における枠組みを移流拡散現象へ包括的に拡張する理論を構築し、さらにマーケットマイクロストラクチャー理論に基づきミクロの視点から価格構成機構を展開する研究分野として計算市場運動学 ( Computational Market Dynamics : 以下CMD ) を提案する。CMDの概念は従来の研究等では困難とされてい

- 
- 1) 慶應義塾大学院 理工学研究科機械工学専攻  
( 〒223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1 , yoon@tana.mech.keio.ac.jp )
  - 2) 工博 慶應義塾大学教授 理工学部機械工学科  
( 〒223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1 , taka@mech.keio.ac.jp )

た経済動学的現象の解明にあり、金融工学において数値流体力学（ Computational Fluid Dynamics：以下CFD）[2]の体系を実践することにある。期待される研究成果として、(a)高精度市場数値シミュレーションによる市場安定化機構の解明、(b)効率的な市場売買手法の構築、(c)市場間連成問題の解析等が挙げられる。

## 2. CMDの体系

### (1) 研究分野の構成

CMDの研究分野は大きく3つに大別される。第一の分野は基礎方程式系の構築であり数値シミュレーションを視野に入れた実現象のモデル化および基礎方程式の導出である。一般に数値解析を主要分析ツールとする学問分野は基礎方程式の大枠が既知とされているが、本論文で提案されるCMDには定型とされる基礎方程式が今のところ存在しない。すなわち現在のCMD研究においては、その現象のモデル化および基礎方程式の構築さえも未解決な問題であり研究の重要な一分野となる。第二の分野は、得られるであろう基礎方程式の離散化およびスキーム開発であり本学問体系の中心となる分野である。スキーム開発は計算精度の向上や演算コストの節約のみならず、市場取引という経済現象をいかに正確にシミュレートしているかが重要な指針となる。また、市場取引における制度や仕様等をいかなる境界条件によって反映すべきか、初期誤差による影響がシミュレーション結果にいかなる影響を及ぼすかはスキーム開発と基礎方程式系の両分野に股がる問題となる。そして、残る第三の分野は得られた基礎方程式および計算スキームを利用しての実現象に対する検証である。以上の点からすれば、分野としては大きく3つに大別されるもののそれぞれの分野は密接に関係するものであり、総体系を踏まえた理論構築やスキーム開発が必須である。次節では、すでに学問体系として確立しているCFDとCMDとを対比する。

### (2) CFDとの対比

CFDは質量、運動量、角運動量、エネルギーの保存方程式を差分法、有限体積法、有限要素法、境界要素法などの計算手法を用いて基礎方程式を適切に離散化し、コーディングの結果を多種多様な計算機による自然現象のシミュレーションによって流れ場を理解し、新しい法則の発見および設計等に必要な情報を得る学問である[2]。この概念は全くCMDに受け継がれる。唯一の違いは、CFDにはNavier-Stokes方程式というほぼ確立された基礎方程式が存在するのに対して、CMDはその基礎方程式の構築が一研究分野として非常に重要な位置付けになる点である。つまりは基礎方程式系の構築を除くすべての研究分野はCFDとほぼ同体系となる。一方、CMDにおける基礎方程式と解析手法の関係はCFDにおける新たな基礎方程式の構築に影響を与える可能性がある。それは、市場における価格形成機構が自己組織化モデルで表現される場合に、その自己組織化モデルの概念を乱流解析に対して組み入れることが可能となる点である。このプロセスはまさに複雑系研究が目指すものといえる。

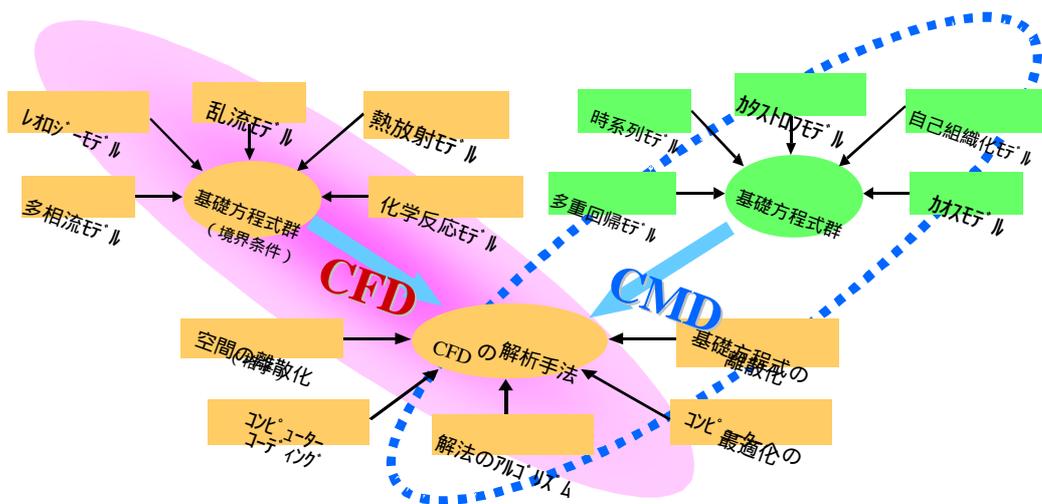


図1 CMDとCFDの比較

### 3. 基礎方程式の誘導について

金融工学にはアセットアロケーション、ポートフォリオ構築、アセットライアビリティマネジメント、リスクマネジメント等多くの領域があり、各々の分野において概念を記述する方程式やモデル化による漸化式が存在する。その中でも離散過程である価格変動を、連続系を記述する偏微分方程式の形式で記述したBlack-Scholesモデル[3]は、その導出プロセスにおいて金融工学に飛躍的な技術革新をもたらした。CMDでは離散過程から偏微分方程式への展開という従来の体系をさらに発展させ、市場構造の変態を記述する基礎方程式系の導出が要求される。その際の理論体系の拡張としてのプロセスは、拡散方程式から移流拡散方程式への移行である。しかしながら現在はまだ大枠としての拡張指針が存在するのみであり、市場取引現象を精緻にモデル化する手法が構築されたわけではない。そこで本論文ではまず最初に、現在一般に市場分析手法として確立されているテクニカル分析の拡張およびBlack-Scholesモデルの拡張による基礎方程式系の誘導例を示す。つぎに、市場構造を新たな視点で記述する概念を導入し、従来型分析の延長によらない新たな基礎方程式系の誘導例を示す。最後に、以下に表す三例の比較によって展開される考察から経済現象のマイクロモデル化の有効性を検討する。

#### (1) テクニカル分析の拡張

基礎方程式導出のためのアプローチの一例として金融分野におけるテクニカル分析の拡張理論を考える。テクニカル分析には非常に多種多様な手法があるが、その中で最も数理的概念が高いと思われる「チャートのフラクタル分析」を基軸に基礎方程式系の構築の一考を示す。一般に、ある資産の価格推移を、時間を独立変数としてグラフ化したものをチ

チャートと呼ぶ。チャートがフラクタル性を持つことは広く信じられているが、これは時間軸の測度（単位）を変化させてもチャート特性に顕著な変化が見られないことから有力な仮説とされている。しかしながら、時間測度を日数単位から時間単位に変更した場合に、チャートの持つフラクタル性が崩れることは日次ベースのチャート図と日中ベースのチャート図を比べれば明らかであろう。図2は東京証券取引所に上場しているある企業の日中変動、日次変動、週次変動、月次変動をほぼ同一のスケールに規格化し、同一のチャート図上に表したものである。

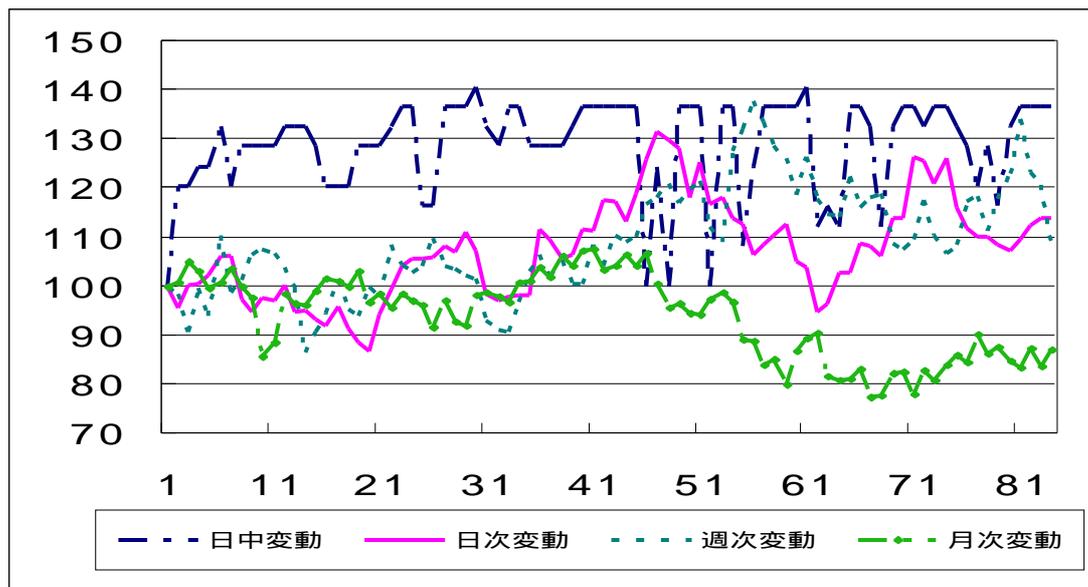


図2 上場企業株価の価格変動（日中変動、日次変動、週次変動、月次変動）

チャート図上の日中変動のみが明らかに他の変動と異なった変動であることはスペクトル分析を行うまでもなく認識可能である。この差異こそがフラクタル性の崩れを示すものである。このフラクタル性の崩れを説明する仮説として以下の二つが挙げられる。

仮説(a) 日を単位とするチャートは離散量を示すチャートである。一方、時間ごとの価格変化はインターバル時間の差こそあれ連続的に発生するものとして扱われるべき量である。すなわち両者は統計的性質が異なる（離散量と連続量の取扱いの違い）。

仮説(b) 日次価格変動は市場での日中変動の最終的な結果の変動である。一方、時々刻々と変化する日中価格変動はその瞬間の価格均衡の連続的な変動である。よって両者は価格構成機構が異なる（価格構成機構の違い）。

仮説(a)は日次変動を記述する方程式と日中変動を記述する方程式が、離散量を前提とするか連続量を前提とするかの違いによって異なったプロセスから誘導されることを示唆する。具体的な主導プロセスの違いとは、日次変動を漸化式として、日中変動を偏微分方程式として記述する方法に対応する。しかしながら、統計的な性質の違いにより方程式の誘導を分けるよりも、以下に述べるように仮説 (b)の概念を採用することにより、価格構成方程式を全体的な見地から捕らえることが重要となる。

仮説(b)の概念を示したものが図3である。図3は価格変動を仮想位相空間のトラジェクトリーとして捕らえることにより、取引の初期値と最終値が位相空間内のポアンカレ断面上の通過点であることを示している。つまり、日次変動とは日中変動のポアンカレ写像であることが図3より示される。

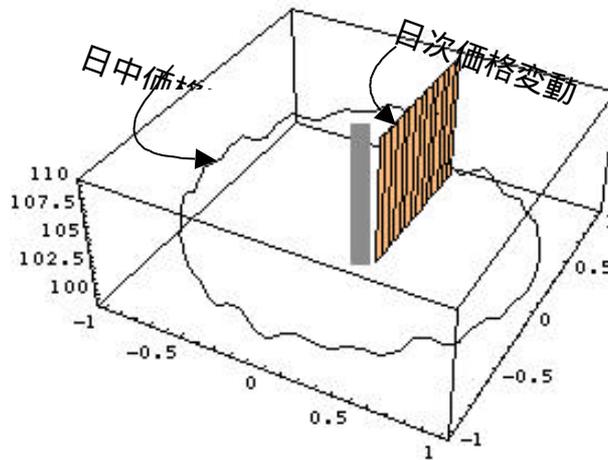


図3 仮想位相空間内の日次変動と日中価格変動

そこで日中の価格変動位相空間を価格空間と定義し、価格空間での変動の振舞いを定式化するアプローチが基礎方程式導出の一考となる。この定式化による価格変動の記述は、従来の確率過程による価格変動の記述と比べ次の2点において決定的に異なる。

- (i) 基礎データが日次ベースと日中ベースで異なる点
- (ii) 価格変動そのものにフラクタル性を見出すのではなくポアンカレ断面においてフラクタル性を見出す点

価格空間での変動の記述については誘導についての比較の節において記す。

## (2) Black-Scholes偏微分方程式の拡張

Black-Scholes方程式は熱伝導等を記述する放物型偏微分方程式と同形であり、以下で示される。

(1)

ここで  $f$  は派生商品価格、 $r$  は金利、 $S$  は資産価格、 $t$  は時間、 $s$  は資産価格時系列の標準偏差値である。この式は資産価格が確率の変動に従うことを前提として伊藤過程および伊藤の補題より誘導される。

(2)

伊藤過程は(2)式で記述されるが、トレンドを示す右辺第1項の任意関数  $(S,t)$  の決め方如何によってはBlack-Scholes方程式(1)に移流項が付与された次式で記述される移流拡散方程式が誘導される。

(3)

移流拡散方程式への移行に関する詳細な議論は次報に譲ることとするが、具体的な誘導手法は伊藤過程におけるトレンド関数  $(S,t)$  を派生商品価格と任意係数で構成されるとして従来の誘導を行うだけのものである。実際にはトレンド関数  $(S,t)$  の構成方程式に対する制約条件および得られる移流拡散方程式の境界条件を視野にいれた議論が必要であるが、ここではBlack-Scholes方程式とは1次元移流拡散方程式の移流項を消去した偏微分方程式であることを指摘するにとどめる。

### (3) 局所価格構成機構を考慮した誘導

上記のプロセスとは全く異なった視点で価格変動基礎方程式の誘導を示す。市場における売買では売手と買手が同数の取引量を交換する。この事実は価格形成が局所均衡において生じることを示しており、少なくとも取引が継続的に行われる市場においては売りおよび買いの不均衡が市場価格の変動を生じさせているわけではない。この局所均衡下での価格変動を記述するためには価格形成時間という新たな概念の導入が必要となる。

#### (i) 価格形成時間

従来の経済学では価格形成と売買成立を同一視し、その事象が同一時刻に発生していることを公理としている。価格形成と売買成立が同一時刻に完了することは現象論的事実であるが、本質的な機能を考慮すれば価格形成と売買成立は別概念であることが判明する。それは価格形成がまさに価格の形成を司る行為であるのに対し、売買とは資産と資金の交換および成立価格の明示である。つまり市場とはこれら2つの異なった機能を微小時間で実行する機能系であり、これらの同一視が市場における価格形成という機能の本質性の解明を困難にしてきた一因といえる。本論文ではこれらの2つの機能を分離し、新たな概念として価格形成に要する時間を意味する「価格形成時間( $dT_{pf}$ )」を導入する。価格形成時間とは計量可能な物理時間ではなく、計測体系の枠組みの中で定義される微小時間のことであり、微積分における微小要素に対応するものである。

#### (ii) 価格形成行程(仮想仕事の原理)

従来の経済学ファイナンス理論における価格形成では、ここで提案される意味での価格形成時間を長くとり過ぎるために局所価格不均衡を検出することが不可能であった。新概念の導入は市場売買における局所均衡を機能別に分解し、仮想局所不均衡が価格変動を発生させるという以下のミクロ価格形成機構を提案できることになる。

- (a) 買付(売却)資金が市場に流入(出)する
- (b) 価格が微小に変動し、価格形成時間後の新たな価格が決定される
- (c) 売却(買付)資金が市場から流出(入)し、取引価格が明示される

上記の(a)および(b)の事象に対して仮想仕事の原理を適用することにより、価格変動

が取引金額を独立変数とする関数になることが導かれる。取引資金量を  $m$ 、資産  $i$  の売買気配量関数を  $v_i(t)$ 、資産  $i$  の任意係数を  $A_i$  とすると局所価格変動幅  $x$  は次式で記述される。

(4)

ここで売買気配関数  $v_i(t)$  はポアソン分布関数であると推測される。この売買気配量関数  $v_i(t)$  の構成方程式を決定する手法には確率過程からの誘導や数値シミュレーションなどいくつかの方法が存在するが詳細は次報に譲ることとする。上式 (4) によって (c) における取引価格の明示が行われることにより価格形成時間後の価格が決定される。このプロセスの連鎖が価格変動を記述することになる。

#### (4) 三つの誘導例の比較

ここに示した三つの基礎方程式の誘導法の中で 2 番目に示した Black-Scholes 方程式の拡張は従来の理論体系をそのまま展開したに過ぎず、誘導に理論的矛盾はない。しかしながら、移流項の導入に際して従来の統計的見地によるトレンドの推定との差異を明確に検証する必要がある。一方で 1 番目に示したテクニカル分析の拡張については価格空間での運動方程式を確立するための手法として日中変動からのフラクタル性を検出する方法が一般的と思われるが、3 番目に示した局所価格形成機構から価格空間における支配方程式を誘導する方法も有力である。つまり、1 番目と 3 番目の展開を融合して一つの基礎方程式系を構築する手法である。ただし、テクニカル分析の拡張は統計分析から日中データと日次データとが異なった特性を持つことが実証できるが、局所価格形成機構については実現象を仮想的にモデル化している点において実証的でないことを考慮する必要がある。

#### 4. モデル化における適合性

W.Weidlichら [4] は単純な現象の類似性から自然科学現象を社会科学モデルに組み込むことに警告を与えている。

それは確率や誤差という名の基に、安易に確率過程を導入したり摂動項を消去することに対して疑念が残るためであろう。従来の統計分析におけるモデル化はデータの厳密性に対する議論が中心であり、現象の機構に対する詳細な議論を回避しているように思われる。CMD は実際のシミュレーションを行うためにミクロ的見地からのモデル化が必須であり、実現象の模写が主題となるため社会科学分野に対する有効性は高い。さらに、ミクロ的要素の蓄積がマクロ的視点を構築する枠組みは社会科学分野の解析において親和性が高い。金融分野での従来型分析は変数の数を増やすことによって事象の起こりうる確率の精度を上げようと試みる。しかしながら、社会現象における事象確率が向上したとしてもその精度向上を定量的に評価することは、現象に再現性がないことから不可能である。その一方でミクロ構造をモデル化し、その蓄積によってマクロ構造を表現する CMD は数値的な安定性を調べる

ことにより分析結果の活用が定量的となる。

## 5. 結 言

本論文ではCMDという新たな研究分野を提案し、今後の金融分野における工学技術の具体的な活用体系を包括的に示唆した。その際、数値流体力学（CFD）の体系が有効かつ実務的にCMDの解析体系に適用される。

CMD研究の指針を示すため解析に用いる基礎方程式の誘導を従来理論の拡張と新たな視点からそれぞれ独立的に例示した。従来分析の拡張例としてテクニカル分析を挙げ、日中価格の連鎖は従来分析データとして用いてきた日次データ列とは本質的に異なること、および日中価格位相空間におけるポアンカレ面が日次データ列に対応することを指摘した。また、Black-Scholes方程式（拡散方程式）が容易に移流拡散方程式に展開できることを示し、この拡張において理論上の矛盾は生じないことを指摘した。さらに、全く新たな基礎方程式の誘導概念を紹介し、自己組織化モデルおよび複雑系分析への取組みを可能とする道筋を示した。

謝辞：本研究は日本商品先物振興協会からの助成金を受けて行われたものであり、ここに改めて謝意を表す。

### 【参考文献】

- (1) M.O'Hara, *Market Microstructure Theory*, Blackwell Publishers Ltd., 1995
- (2) 棚橋隆彦, はじめてのCFD, コロナ社, 1996
- (3) F.Black and M.Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol.81, 637-54, 1973
- (4) W.Weidlich and G.Haag, *Concepts and Model of a Quantative Sociology*, Springer-VerlagGmbH&Co.KG, 1983

## Black-Scholes方程式の改良と拡張

Fischer BlackとMyron Scholesは市場においては裁定取引が実効されるとの仮説の中でデルタヘッジングする際の組合せポジションであるポートフォリオを想定し、そのポートフォリオに対してリスクのない安全なポートフォリオの増分が $d = r dt$ で表示できるとしている[1]。この仮説のもとに派生商品のダイナミクスを決定するBlack-Scholes方程式が誘導されている。本論文では、裁定状況を示す仮説 $d = r dt$ が伊藤過程に矛盾すること、ゆえにBlack-Scholes方程式は経済物理の行動を必ずしも正しく表現していないことを指摘する。このことは対数空間におけるBlack-Scholes方程式の特性方向が伊藤の確率微分方程式から得られる期待値の時間変化率に一致しないことから明らかである。従って本論文では特性方向と時間変化率が一致するようにBlack-Scholes方程式を改良する。その結果、改良された新しい方程式の中にはBlack-Scholes方程式には含まれていなかった原資産トレンド $\mu$ がパラメータとして含まれることになる。新たに提案されるパラメータ $\mu$ はPaul A Samuelson[2]が指摘した株式の期待収益率に対応するものであり、Fischer BlackとMyron Scholesがその論文中で否定したパラメータである。著者らは、このパラメータを導入した新しい方程式から得られる厳密解の特性を調べることによりその解が経済のダイナミクスを従来のものより現実的に表現することを示す。

## 1. はじめに

Black-Scholesモデルは原証券の変動を伊藤の確率過程とすることに基礎を置く。伊藤の確率過程とは

(1)

で記述される確率過程であり、ここで $S$ は資産価格、 $\mu$ は資産価格 $S$ のトレンド、そして $\sigma$ は資産価格のボラティリティ（価格列標準偏差値）である。 $W$ はWinner過程で $(dW)^2 = dt$ を満足する。この伊藤過程は十分に検討されており資産価格の変動を記述するモデルとして認知をされている。しかし、資産価格 $S$ がトレンド $\mu$ によって記述されるにもかかわらず、その派生商品 $f(t, S)$ に対するBlack-Scholes方程式

(2)

にはトレンド $\mu$ が含まれていない。ここで以下の疑問が生ずる。

疑問：解 $f$ はトレンド $\mu$ を含むべきではないのか？

この問題は単純に「トレンド  $\mu$  と短期金利  $r$  が一致する」ことによって解決される問題ではない。この疑問に答えるのが本論文の目的である。

## 2 . Black-Scholes 方程式を改良する根拠

まず疑問に答えるために伊藤の確率過程に対して注意すべきことが 2 点ある。

### 2 . 1 伊藤過程との矛盾

確率変動項を無視すると伊藤過程は

(3)

となる。すなわち確率変動という不確定要素を除去したポートフォリオに対して  $dS = \mu S dt$  が成立する。ところが Black-Scholes 方程式の誘導では  $dS = r S dt$  を仮定している。

### 2 . 2 特性速度[3]

$\mu$  と  $\sigma$  が一定のとき、伊藤の確率過程は

(4)

となる。ここで  $S(0)=S_0$  である。すなわち対数空間で見た場合、期待値および分散は

(5)

(6)

で与えられ、これらの時間微分を求めると

(7)

(8)

となる。よって解  $f$  を流れ場で考えた場合、 $f$  の  $\log S$  空間での特性速度は  $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  である。よって Black-Scholes 方程式の特性速度は  $r - \frac{1}{2}\sigma^2$  となるべきである。

以上の 2 点が Black-Scholes 方程式を改良する根拠となる。

## 3 . 派生商品に対する新しい偏微分方程式

### 3.1 Black-Scholes モデル

派生商品  $f$  を 1 単位購入し、原資産  $S$  を  $\Delta$  単位売却するポートフォリオを考える。すなわち、ポートフォリオ  $\Pi$  を

(9)

と定義する。このポートフォリオの変動は  $d\Pi$  を一定として

(10)

となる。伊藤の補題を用いると

(11)

であるから、これを上式に代入すると  $d\Pi$  は

(12)

と変形できる。ここで  $dS$  に含まれている確率変動項  $dW$  を除去するヘッジを行うと

$$d\Pi = \frac{\partial f}{\partial S} dS$$

(13)

となる。この際のヘッジ比率が  $\Delta$  であるため、このヘッジはデルタヘッジングと呼ばれる。デルタヘッジングを行うことによってポートフォリオは確率変動を含まなくなるためリスクのない安全なポートフォリオになる。この安全なポートフォリオは確率変動が存在しないため、安全資産である債券と同等のペイオフが相当であるというのが Fischer Black と Myron Scholes の主張であり、この裁定仮説

(14)

によって以下の Black-Scholes (偏微分) 方程式が誘導される。

(15)

### 3.2 棚橋-尹モデル

裁定仮説をはじめから想定しなければ安全なポートフォリオ に対して、金利を  $r$  とした場合、

(16)

(17)

となる。ここで、式(16)においては微小時間  $dt$  における勾配が金利  $r$  に、式(17)については勾配が  $\mu$  になっている点が重要である。これは派生商品  $f$  においてはその性質が契約と規定されるためにリスクフリーレートが適用されるのに対し、原資産  $S$  においては伊藤過程の考えに準拠してトレンド  $\mu$  をその勾配とすることが妥当であることを意味する。この視点は金利の変化に対して派生商品の変動がその金利コストに対応するのに対し、原資産については金利変化における資産変動特性の変化の方が重要であるという考えに基づいている。

具体的な事例として原資産が株式である場合を考える。株価は複合的な要因によって決定されるが、ここでは金利変動という環境のみを考慮すると、株価は金利変動と反対の動きをする。これはまさに金利  $r$  とトレンド  $\mu$  が逆の動きをすることを意味する。裁定仮説は市場原理がトレンド  $\mu$  を金利  $r$  に収束させると説いているが、株式のトレンドがマイナスとわかっている場合に裁定取引が実行されるだろうか。従来はこのような株式トレンドがマイナスの状況を企業の信用スプレッドで説明してきたが、本来的には株価のトレンドに起因する問題である。裁定取引業者は倒産間際の企業の株式をリスクフリーレートで裁定取引することはない。この裁定取引が実行されない原因は、その企業の信用度が問題なのではなく、株価トレンドが明らかに金利  $r$  と異なってマイナスになることを認知しているためである。Fischer Black と Myron Scholes は裁定取引が確実に実行されることを想定し、原資産の変化速度に対応する期待収益率に左右されないと論じているが、著者らは裁定取引の実行性が原資産の期待収益率に影響を受けていると主張する。これらを踏まえ式(16)、(17)が成立する状況を棚橋・尹仮説と呼ぶことにする。この仮説のもとに、 $\frac{df}{f} = \frac{r}{S} dt$  を用いると

(18)

を得る。Fischer Black と Myron Scholes が唱えた裁定が成立するという仮説(14)では  $d = r dt$  であるから、この仮説は棚橋-尹仮説の  $\mu = r$  という特別な場合に相当する。ただし、彼らの主張は  $\mu = r$  という特別な場合のみが裁定取引によって恒常的に成立すべきである

と主張しているため、著者らが考えている「安全なポートフォリオであっても原資産トレンド  $\mu$  を含むことが正当である」との見解とは本質的に異なる。

式(14)の代わりに式(18)を用いることによって派生商品  $f$  が満足すべき偏微分方程式は

(19)

となる。この方程式を棚橋・尹第一方程式と呼ぶことにする。左辺第3項が Black-Scholes 方程式との違いである。

棚橋・尹第一方程式(19)は田畑[3]やNeftci[4]がBlack-Scholes 方程式に対する Feynman-Kac の解法で指摘した、「無裁定条件時の派生商品価格は双曲型の偏微分方程式である」、との見解に沿うものであり、著者らが言及している裁定条件の実行性に対する議論と合致する。この視点に立てば棚橋・尹第一方程式(19)はBlack-Scholes 方程式の拡張であると解釈されるが、著者らは裁定の実行性が原資産価格のトレンドに影響を受けると見ている点において異なる仮説(16)、(17)に立脚している。

#### 4．対数空間での偏微分方程式

##### 4．1 変数変換

標準的な変数変換によって対数空間での偏微分方程式を導くため

(20)

なる変数変換を行う。ここで  $K$  は権利行使価格、 $T$  は期間である。この結果、関数  $g$  についての偏微分方程式（移流拡散方程式）

(21)

が導ける。右辺第1項は拡散係数が  $\frac{1}{2}\sigma^2$  の拡散項、第2項は移流項で方程式の特性速度は

(22)

で与えられる。これは式(7)で示した伊藤過程における期待値の変化率  $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  に等しく、物理的にも理にかなっている。

#### 4.2 移流拡散方程式[5]

Black-Scholes 方程式は変数変換によって最終的に熱伝導方程式に帰着される。これは資産価格変動を拡散現象として表現しているために、熱拡散を記述する方程式と同型になる。棚橋-尹モデルは資産価格の変動が拡散現象のみならず、移流現象との混合現象として捕らえるため流体力学で通常使われる移流拡散方程式となる。移流拡散方程式は拡散方程式と異なり非線形項である移流項を含むためその扱いが格段に難しく一般に解析的に解くことができない。従来の市場分析においては非線形項である移流項としての分析が不十分であり、このことが非線形現象としての取り扱いを十分に考察できなかった一因であることが指摘される。その点からも非線形を表現する棚橋-尹モデルの方が有効である。

#### 5. 厳密解の誘導

一般に移流拡散方程式は厳密解を求めることが困難であるが、棚橋-尹第一方程式の厳密解はBlack-Scholes 方程式同様、熱伝導方程式の解を利用することにより求めることが可能となる。拡散方程式

(23)

$$[\text{初期条件 } u(0, x) = u_0(x)] \quad (24)$$

の厳密解はフーリエ変換により

(25)

と求まる。ここで  $D$  は拡散係数である。よって関数  $g(\tau, x)$  に変数変換

(26)

を行う。ただし、

(27)

(28)

(29)

である。その結果、関数  $h(\tau, x)$  は拡散方程式

(30)

を満足する。すなわち熱伝導の方程式と同じである。  $t = T$  のとき  $t = 0$  であるから初期条件は

(31)

となる。ただし

(32)

である。この結果を上式に代入すると、初期条件は

(33)

と求まる。以上より、厳密解は

(34)

と求まる。ただし、

$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= I_1 - I_2 \\
 I_1 &= \exp \left[ \frac{1}{2} (k+1)x + \frac{1}{2} (k+1)\sigma^2\tau \right] N(d_1) \\
 I_2 &= \exp \left[ \frac{1}{2} (k-1)x + \frac{1}{8} (k-1)\sigma^2\tau \right] N(d_2) \\
 N(d_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{d_1^2}{2} \right] \\
 k &= \frac{2\mu}{\sigma^2}
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

である。  $N(\cdot)$  は標準正規変数の分布関数である。ここで

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left( x + \mu + \frac{\sigma^2}{2} \tau \right) = d_2 + \sigma\sqrt{\tau}
 \tag{36}$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left( x + \mu - \frac{\sigma^2}{2} \tau \right) = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

である。ただし、 $x = \log \left( \frac{S}{K} \right)$  である。よって、関数  $f(t, S)$  について整理すると厳密解

$$f(t, S) = e^{-r\tau} \left\{ S N(d_1) e^{\mu\tau} - K N(d_2) \right\} \quad (37)$$

を得る。ここで  $\mu = r$  と置けばBLACK-SCHOLES方程式の厳密解と一致する。すなわち、リスクのない安全なポートフォリオにおいて、金利による増加  $f(t, S) e^{rt}$  が  $\{ \cdot \}$  に等しいことを表している。そして、 $\{ \cdot \}$  内の第1項はトレンド  $\mu$  に従って増加している。よってこの解は物理的に正しい現象を表現している。ヨーロッパ型のコールオプションを  $c(\tau, S)$ 、プットオプションを  $p(\tau, S)$  とすればプットコールパリティより

$$c(\tau, S) = f(\tau, S) \quad (38)$$

$$p(\tau, S) = c(\tau, S) + K e^{-r\tau} - S \quad (39)$$

となる。よってコールとプットのオプション価格はそれぞれ

$$c(\tau, S) = e^{-r\tau} \left\{ S N(d_1) e^{\mu\tau} - K N(d_2) \right\} \quad (40)$$

$$p(\tau, S) = S \left\{ N(d_1) e^{(\mu-r)\tau} - 1 \right\} + K N(-d_2) e^{-r\tau} \quad (41)$$

と表示できる。ただし、正規分布関数に対する関係式  $1 - N(d_2) = N(-d_2)$  を用いた。

## 6 . 棚橋・尹モデルの特性

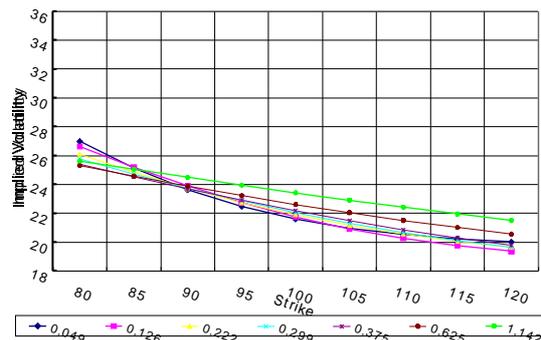
新たに提案される棚橋・尹モデルはBlack-Scholes方程式にはない原資産トレンド  $\mu$  をパラメーターとして含む。このパラメーター  $\mu$  の導入は派生商品市場で計測されるボラティリティスマイル[4]に対する新たな解釈を可能にする。

### 6 . 1 ボラティリティスマイル

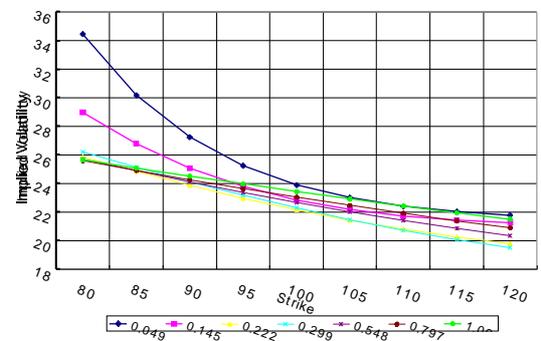
派生商品市場の中でオプションは通常インプライドボラティリティ [5]によって価値を評価される。一般に権利行使価格の異なるオプションはインプライドボラティリティを尺度として見た場合、権利行使価格が現在の資産価格から離れるほど高く評価される。この状態はボラティリティスマイルと呼ばれている。Fig.1、Fig.2は2000年7月24日と8月21日の日経平均指数オプションのボラティリティスマイルの状況を示したものである。両グラフ共に満期までこれらは市場での実際のオプション価格からBlack-Scholes方程式によって逆算され

たものである。Fig.1とFig.2を比べると1ヶ月物オプションのインボラティリティが大きく異なっており、満期日まで3ヶ月以上のオプションはほとんど値を変えていない。さらに曲線の形状についても1ヶ月物および2ヶ月物が曲率を変化させているのに対してそれ以外の形状はほとんど変化していない。 Fig.3に満期までの期日が1ヶ月のオプションに

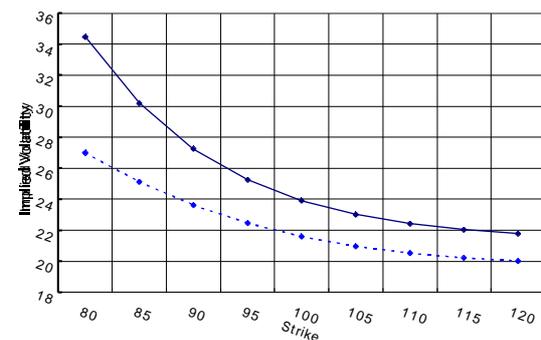
**Fig.1 日経平均指数オプション (@ 16520)**  
ボラティリティスマイル (2000年7月24日)



**Fig.2 日経平均指数オプション (@ 16040)**  
ボラティリティスマイル (2000年8月21日)



**Fig.3 ボラティリティスマイルの変化**  
(日経平均指数オプション 1ヶ月物)



に対するボラティリティスマイル曲線の変化を示した。図には示さなかったが、満期までの期

日が1年のオプションは曲線の形状および値がほとんど変化しない。インポライドボラティリティは市場が評価する市場の変動性を意味しており、このことから市場は「8月21日から一ヶ月以内の変動に対して、7月24日時点より慎重な価格形成をしていることが暗示される」と解釈される。

## 6.2 インポライドミュー

従来の考えでは「ボラティリティスマイルが権利行使価格付近に原資産価格が変化した場合のボラティリティの変化を示している」と解釈されてきた。しかしながら、実際のボラティリティ曲線の変化は原資産価格の動きの速さ、言い換えれば価格変化の速度に大きく影響を受ける。

実際に1日で10%の下落した場合と1ヶ月で10%の下落した場合とではボラティリティ曲線の変化は異なる。また、Fig.1およびFig.2が示す通りBlack-Scholes方程式から換算されるボラティリティ曲線は権利行使価格が原資産価格から離れれば離れるほどより大きなスマイルとなっている。これは実際の計算を行えば明らかであるが、ディープアウトオブザマネーのオプションの価格がボラティリティ換算時に過剰に評価されるためである。Black-Scholes方程式を用いる限りこの「権利行使価格が原資産価格から離れるほど過剰な評価を受ける」ことは避けられない。

棚橋・尹モデルは原資産トレンドを示す $\mu$ を含んでいるためパラメーター $\mu$ をボラティリティと同様にインポライドミューとして換算することが可能である。Fig.4はFig.1に対応するボラティリティスマイルを、Fig.5はFig.2に対応するものをインポライドミューで換算したものである。この際の換算法は、権利行使価格100でのインポライドボラティリティを基準ボラティリティとして定数とし、棚橋・尹第一方程式(19)によってオプション価格より換算されるミューを計算する方法をとった。ここで基準ボラティリティをどこに設定するかは議論が必要であると思われるが、単純化するためにアットザマネーオプションのインポライドボラティリティを採用した。基準ボラティリティの取り方によってインポライドミューの水準が異なることになるが、ここではこの議論には触れない。

また、Fig.6に満期1ヶ月物オプションと満期1年物オプションのインポライドミュー曲線を示したが、1ヶ月物が水準を大きく変化させているのに対して1年物は水準および形状共にほとんど変化させていないことがわかる。

Fig.4およびFig.5を対比させると満期までの期日が1ヶ月のものと2ヶ月のもの曲線形状が変化しており、さらに1ヶ月物については権利行使価格95のインポライドミューがその水準を大きく変えている。インポライドミューをインポライドボラティリティと同様に扱い「市場が暗示しているパラメーター」として解釈するならば、2000年7月24日から8月21日の変化は「市場は2000年7月24日に日経平均指数が5%下落した場合には1%の上昇を見込み、8月21日には5%下落した場合に2%というより強い上昇を推定している」と解釈される。上記で記した通り、インポライドミューの全体水準については議論としないため、1%の上昇見込みが2%の上昇見込みになったとは断言できないが、「相対的に、より上昇する速度が速まる

と解釈された」とは主張できる。

また、Fig.4およびFig.5から権利行使価格が90および95付近にインボライドミューのピークがあり、これは市場が現在価格から10%ぐらいまでの下落に対して意識を持っていることを示している。基準ボラティリティをアットザマネーオプションとしたため権利行使価格100以上のオプションについてはインボライドミューがマイナスとなる。このことからインボラ

Fig.4 日経平均指数オプション (@ 16520)  
インボライドミュー -曲線(2000年7月24日)

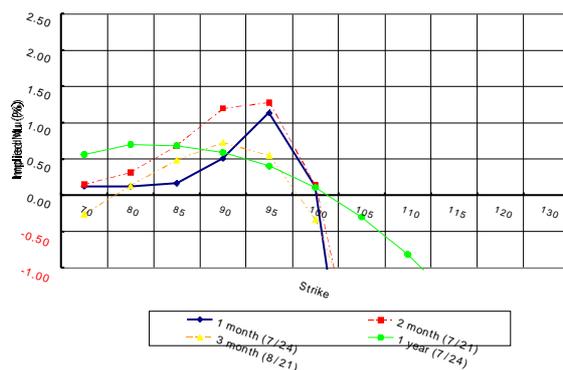


Fig.5 日経平均指数オプション (@ 16040)  
インボライドミュー -曲線(2000年8月21日)

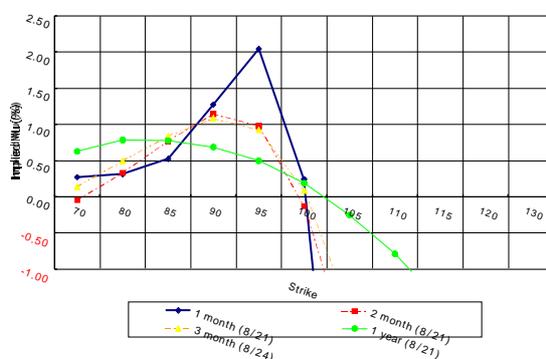
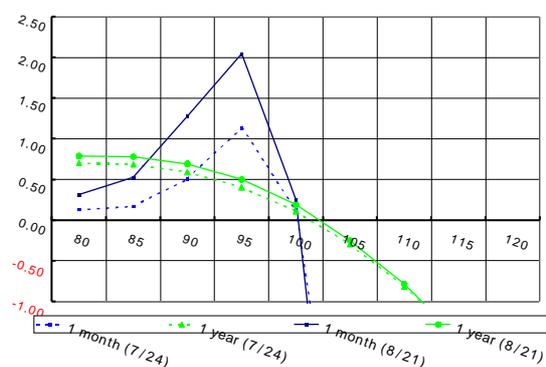


Fig.6 インボライドミュー曲線の変化



イドミューが直接的に市場が暗示してる上昇および下落の方向性を示すことについては言及

できない。しかしながら、権利行使価格が原資産価格よりも下にあるオプションのインプライドミューが上にあるオプションよりも高いことは、「下落した際には原資産価格上昇速度が上がる」と解釈され、ミーンリバージョン（平均値回帰）を市場が意識していると推定される。

### 6.3 Black-Scholes方程式の波及性

市場という機構は明らかにフィードバック構造であるため、情報が価格形成に影響を与える。Black-Scholesモデルがすべての市場参加者に周知となった現状では、Fischer BlackとMyron Scholesが主張する裁定の仮定が実現されている。具体的には金利 $r$ と原資産価格トレンド $\mu$ が異なっている場合であっても、その差異が相対的に小さければ裁定取引は原資産価格トレンド $\mu$ を金利 $r$ へ収束させる。その点からすればBlack-Scholes方程式の波及性はかなり強い。しかしながら、原資産価格トレンド $\mu$ が金利 $r$ から大きく乖離している場合には $\mu$ の $r$ への収束は生じない。事実、企業が業績等の情報発信により株価の $\mu$ が大きく変化した場合に裁定取引業者はかなりのマージンを想定して価格設定を行うが、棚橋-尹モデルはこのダイナミクスが生じている環境下においてボラティリティとミューという二つのパラメーターによる市場の状態評価を可能とする。

### 6.4 物理現象としての解釈

棚橋-尹第一方程式はBlack-Scholes方程式という拡散方程式に移流という考えを導入し、移流拡散方程式に拡張したものである。これを現象として考えれば、市場の価格変化が単なる確率的な拡散現象ではなく、各瞬間において方向性を意味する移流現象と確率的要素として表現される拡散現象の混合現象であることを意味する。言い換えれば、資産価格を位相空間での流れとして捕らえ、 $S$ 価格空間内での非定常流れに対応させるものである。

近年主流となっている確率的ボラティリティモデルは一般に長期平均ボラティリティを持ち、それ以外に確率的なボラティリティ変動が存在するとしている。これを物理現象として解釈するならば拡散の度合いが確率的となり、物体の動きはあくまである決まった方向に動いていることを意味する。一方、棚橋-尹モデルはむしろ拡散現象はあくまで拡散現象であり、物体の主体的な動きが変化していると想定している。著者らは市場の移流をいかに捕らえるかが重要であると考え、主体的な動きを市場が評価しているという意味でのインプライドミューを提案した。

## 7. おわりに

### 7.1 結言

この論文で新しいオプションモデルとして棚橋・尹モデルを提案した。このモデルは次の3点を根拠にモデルを構成している。

- (1) 株価は次の伊藤の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

(2) オプションfはμとσが一定のとき、次の伊藤の補題を満足する。

$$df = \frac{f}{t} + \frac{1}{2} (\sigma S)^2 \frac{^2 f}{S^2} dt + \frac{f}{S} dS$$

(3) リスクのない安全なポートフォリオ = f Sの増分は次の過程に従う。

$$d = frdt - \frac{f}{S} \mu S dt$$

この(3)の仮説はBS仮説d = r dtを改良したものである。この結果オプションfの偏微分方程式は

$$\frac{f}{t} + \frac{1}{2} (\sigma S)^2 \frac{^2 f}{S^2} + \mu S \frac{f}{S} = rf$$

と記述できる。この方程式にはトレンドμが考慮されている。この式においてμ = rと置けばBlack-Scholes方程式と一致するが、棚橋-尹第一方程式は伊藤過程が記す通り確率変数トレンドを変数として扱い、Fischer BlackとMyron Scholesが主張した「派生商品価格には原資産の期待成長率が含まれない」という考えとは根本的に異なる主張を行っている。そしてこのトレンドμに対する見解の相違がボラティリティスマイル等のディープアウトオブザマネーオプションに対する過剰評価をより現実的な評価に換算することを可能にする。さらにインポライドミューというパラメーターによる表示は市場のミーンリバージョン(平均値回帰)に対する見地を示すことを可能にする。

## 7.2 今後の解析について

本論文においては、上記にも記した通り評価されるべき基準ボラティリティをアットザマネーオプションのインポライドボラティリティとした。しかしながら、市場が全体として評価しているボラティリティがアットザマネーであるかは議論が存在する。また、従来のボラティリティスマイルとして計測されていたアウトオブザマネーオプションに対するボラティリティ付与をインポライドミューとして暗示されるトレンドにすべて転化した。しかしながら、本来的には現状価格からの離れた不確実な状態に対して拡散数であるボラティリティの上昇が存在すると思われる。つまりは、アウトオブザマネーオプションに対しては拡散数(ボラティリティ)と移流速度(原資産トレンド)の両者に影響が及ぶものであり、その両者への分解に対する研究は今後の課題である。この分解を合理的に行うためには市場における不変量をどのように考えるかが重要である。実際には不変量が存在するか、もしくは存在しない場合には不変量に近い性質をもつ概念とその近似法を含めて議論を尽くす必要がある。

市場はまさに流体のごとく移流しながらその形態を変化させる。その構造が複雑系であるがために確率に頼ってきた従来の手法は、コンピューターとその活用法いかによっては大きく飛躍する可能性があり、現在のコンピューターの発達はまさにこの分野の研究を

促進させる。その際に数値シミュレーション技術として先端的な Computational Fluid Dynamics (数値流体力学) の適用が技術促進に大きな寄与を及ぼすと考えられる。

謝辞：この研究は日本商品先物振興協会からの助成金を受けて行われたものであり、ここに改めて謝意を表す。

#### 【参考文献】

- (1) Black, Fischer and Myron Scholes,: “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, Vol.81 , 637-654, (1973)
- (2) Samuelson, Paul A.: ”Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly,” *Industrial Management Review*, 6 (Spring), 41-49, (1965)
- (3) 田畑吉雄: “数理ファイナンス論,” 牧野書店, (1993)
- (4) Salih N. Neftci: “An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives,” Academic Press, (1996)
- (5) 棚橋隆彦: ”はじめてのCFD,” コロナ社, (1996-10)
- (6) John C. Hull: “Options, Futures, and Other Derivatives,” Prentice-Hall Inc., (1997)
- (7) Dwight B. Crane , Robert C. Merton, Kenneth A. Froot, Zvi Bodie, Scott P. Mason, Erik R. Sirri, Andre F. Perold, Peter Tufano: “The Global Financial System,” (1995), Harvard Bussiness School Press
- (8) 箕谷千凰彦: “よくわかるブラック・ショールズモデル,東洋経済新報社, (2000-3)

#### 【参考文献メモ】

- [1] Samuelson, Paul .A.[1965],”Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly,” *Industrial Management Review*, 6(Spring):41-49
- [2] Black, Fischer and Myron Scholes, [1973], “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81 (May/June):637-654
- [3] Dupire,B.,[1994], ”Pricing with a Smile,” RISK, (Febuary):18-20
- [4] Derman, E., [1994], “The Volatility Smile and Its Implied Tree,” *Quantitative Strategies Publications*, Goldman Sachs, January 1994

# Three Bodies Trading Model in Financial Markets and Its Numerical Simulation Methodology with Genetic Algorithms

(Analyzing market fluctuation as non-linear, un-steady and non-equilibrium phenomenon)

Hiwon YOON<sup>1</sup>

Hideo SAITO<sup>2</sup>

Takahiko TANAHASHI<sup>3</sup>

## Abstract

We present three bodies trading model in markets for a numerical simulation of financial markets. It has three different type agents who correspond to daytraders, dealers, and investors. The market dynamics can be explained as the result from market participants acting. The model treats all trades without averaging operation, and then calculates interactions among three agents with generic algorithms[1].

## 1. Introduction.

The model introduces three bodies, daytraders, dealers and investors, which can accurately represent financial trading behavior by taking account into micro trading. Three different orientations generate non-linear and non-equilibrium movement, which properly describe market dynamics phenomenon. This study consists of two independent unique ideas; 1) three bodies modeling for financial market mechanism and 2) genetic algorithms approach for applying the model. The suggested analytic methodology makes their two concepts combine into one analyzing scheme for financial markets dynamics. The proposed new scheme can forecast market movement for next certain time period with probability function.

## 2. Proposed Model.

The concept of three bodies trading model in financial markets, should be natural approach to analyze market dynamics, particularly intra-day movement. Based on two

<sup>1</sup> CMD Research Ltd., #6, 5-2-7 Toranomon, Minato-ku, Tokyo, 105-0001, Japan

<sup>2</sup> Keio University, Dept. of Information and Computer Science, 3-14-1, Hiyoshi Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa, 223-8522, Japan

<sup>3</sup> Keio University, Dept. of Mechanical Engineering, 3-14-1, Hiyoshi Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa, 223-8522, Japan

agents model in financial markets or multi agents model with homogeneous character as past studies, markets are going to equilibrium point or range where they agree to optimize their utility function. So

these kinds of models tend to converge, that stochastic parameter or external factor due to information flow are often needed. Traditional financial engineering has introduced new parameter as stochastic volatility and micro market structure model as information imbalance condition. However market often fluctuates under homogeneous information environment, and it is not confident that stochastic volatility is eigen value of the asset. On the other hand, we suggest simple market structure model, which has only three type agents, have different expected return periods, but they would maximize risk return performance at their best. In fact, there are daytraders who repeat to trade, buy and sell, within intra-day trading period, investors who simply buy or sell in certain trading period, and dealers who repeat to trade and sometime carry position in several days. (Additionally arbitragers definitely exist in markets, but they seem parts of market system or market function.) The difference of utility function depends only on expected return period, making interaction among three agents, with the result that markets show non-linear, un-steady, and non-equilibrium phenomenon.

As applying three bodies concept into micro trading mechanism, we assign property for each trade by nine types; each three agents face three type counter parties, so totally nine pairs. The composition from nine type elements expresses market movement. The pairs correspond to chromosome, and the composition sets do gene, respectively.

### **3. Advantages and Performance of the Model.**

The proposed model has several advantage points, comparing to traditional approach. The first point is that three types of market participants, daytraders, dealers, and investors, physically exist in markets, and our definition for their conditions is not too far from actual market circumstance. It means existence of three type agents is not assumption, but it is real. Secondly each trading volume conditions to assign property of each trade, so that the model can consider price movement and trading volume simultaneously. Trading is defined to make price and volume at the same action, and the model does treat them at the same processing naturally. And also modeling process is based on microscopic sense that dose not have averaging operation to decide the most possible phenomenon. The third advantage point relates to capability of explanation. The model can express market movement more delicately rather than one or two bodies model, because of factor dimension under the same volume condition. Additionally the model reserves number of types, but it does not number of agents. Then the same methodology applies more complex market dynamics. Conversely the complexity of market might be measured by number of agents.

In terms of performance, comparing traditional analytic approach like one body model, three bodies model performs about 20% higher based on approximated accuracy ratio averagely. Moreover even total number of agents can be limited below 10, the complexity of market dynamics seems to be unchanged.

### **4. Numerical Simulation Methodology and Capability of Forecasting.**

For demonstrating the capability of the proposed model, the model is applied to numerical

simulation in the actual financial markets, and then it can indicate market forecasting with genetic algorithms methodology. Since market dynamics is generally non-linear, un-steady, and non-equilibrium, it is impossible to estimate three agents behavior that determines the market behavior, by using traditional analytic method. In other words, it is not realistic approach for financial markets, which consist of various senses, to analyze one solution or functional solution. Genetic algorithms in optimization theory are one of the strongest tools that are capable to handle these kinds of issues. It may not assert exactly correct answer, however it can lead high possibility solution by synthesizing. This situation is suitable to market analysis due to its uncertainty. Obviously the genetic algorithms give us concrete approach to apply three bodies model in financial markets.

In practice, we apply this scheme for the stock market by three steps. First, we presume who mainly take part in each tick movement during certain period such as the first 1-hour. The condition is that simulated trading volume could be match with actual trading volume figures. As the same computing process, 100 times combination sets are randomly produced to make the first generation. Secondly, we estimate simulation data and operate genetic process. The differences between actual market data and simulation data are ordered by weighted average of each spreads, and then 100 combinations are selected. 100 sets generate new 100 sets by crossover operation. After another 99 selection processes are performed, one data set is extracted. Thirdly, selected data series indicates us that current position balance among three agents and position creating paths of three agents. Utilizing the information from its result, we can make market forecast for next certain period such as next 1-hour, with probability function, which also indicates market tendency.

## **5. Results and Discussions.**

Three bodies trading model itself show complexity of price movement. It is definitely closer to actual market dynamics, comparing with one or two bodies model. Applying the model to the actual stock market with genetic algorithms approach, we recognize the capability of forecasting during next several minutes and for particular time period like closing. In this study, simple genetic algorithms are adopted to verify the model into actual markets. Diversity on the verification indicates to down trend, so that we admit that genetic algorithms performs sufficiently. Since we approach market dynamics by new ideas, the basic method and simple process are selected to examine market. In next study, we should discuss advanced method like elite genetic algorithms and examine parameters of each agent functions. Moreover the combination of each agent trading histories could be object to examine in order to accuracy of forecasting.

## **6. Conclusion.**

We propose three bodies trading model in financial markets. It is constructed from microscopic view, and traced with market conditions. The new approach performs sufficiently, and it has capability of forecasting during near future. This study is the first empirical approach to treat all trading data set without averaging operation. And it is also the first methodology to consider price

movement and trading volume simultaneously. Finally it could be reconfirmed that computational simulation methodology is promising to study market dynamics.

## 7. Reference.

- [1] L.Darrell Whitley, Foundation of Genetic Algorithms• (Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1993)

# 金融工学における移流拡散型方程式の数値解析

美 里 晋 一

金融工学とは、金融の機能的効率性にかかわる思考・知識・技術体系を創造する学問であり、金融における様々な問題を既存学問領域の知識や知恵を融合することにより解決を試みる学問である。この金融工学の分野において用いられる方程式の多くは、放物型偏微分方程式で表現されている。それは市場における基礎的要因である変動を拡散現象として捉えていることに起因する。

本研究では、金融派生商品を解析モデルとして扱い、その価格評価式であるBlack-Scholes方程式に数値流体力学(CFD)の数値解析手法を用いて数値解析している。従来では、Black-

Scholes方程式は差分法でしか数値解析されていない。本研究では、有限要素法の形状関数という計算空間への写像に着目し、その有効性を金融分析に活用することを視野に入れ有限要素法による数値解析を試みる。さらに、新しい試みとして本研究ではBlack-Scholes方程式に新たにトレンドという項を加えることにより、従来のBlack-Scholes方程式よりもより正確に経済物理の現象を捉えることも目的としている。さらに、従来の研究では複数個の商品の価格を予測する際には、全体を1つの商品として捉え予測を行ってきたが、本研究ではBlack-Scholes方程式をn次元に拡張することにより、複数個の商品を個々で捉え、その相関を考えることでポートフォリオ（資産の組合せ）といった現実的な現象を、より正確に捉えることも本研究の目的としている。

そこで本研究では有限要素法を用いて以下の解析を行った。まず1次元モデルの検証(Case 1)、トレンドの値を変化させての検証(Case 2)、さらに2次元モデルでの検証(Case 3)、最後に相関の値を変化させての検証(Case 4)の合計4種類の解析を行い、以下の知見を得た。

- (1) Black-Scholes方程式の数値解析に有限要素法を適用し、Case 1、Case 3の結果から、本研究で構築したスキームの有効性を確認できた。
- (2) Black-Scholes方程式にトレンドを考慮する理論を導出し、金利に当たる項が負の場合での計算ができ、有効な解析結果を得ることができた。
- (3) Case 2の結果より、トレンドの値が金利の値から大きく離れると、境界にBlack-Scholes方程式の解析解を用いている影響があるといえる。

## 第1章 緒言

### 1.1 研究背景

金融工学<sup>(1)(2)(3)</sup>とは、金融の機能的効率性にかかわる思考・知識・技術体系を創造する学問であり、金融における様々な問題を工学的な手法を用いて解決を試みる学問である。現在金融工学の分野では、経済学、会計学、保険学、金融論、法学、統計学、工学、コンピュータサイエンス、数学等、多くの既存している学問領域における知識や知恵を融合することにより「リスクを的確に捉え、リスクに合理的に対処するにはいかにすべきか」という重要な経済的問題に対し様々なアプローチがなされている。また最近では、マーケットマイクロストラクチャ理論<sup>(4)</sup>により情報の数値化による価格変動特性の分析が行われはじめている。

金融工学は金融製造業の概念生産力の基礎として、家計や企業のための商品設計やリスク管理、証券化などに応用されている。また金融システムの設計においても重要な視点・

概念的枠組みを提供する。

これら金融工学の分野において用いられる方程式の多くは、放物型偏微分方程式で表現されている。それは市場における基礎的要因である変動を拡散現象として捉えていることに起因する。そこで、拡散現象とトレンドという現在の金融工学における枠組みを移流拡散現象へ包括的に拡張する理論を構築し、さらにミクロの視点から価格構成機構を展開する研究分野として計算市場運動学（Computational Market Dynamics：以下CMD）<sup>(5)</sup>という新しい研究分野が提案されている。

CMDの概念は従来の研究等では困難とされていた経済動学的現象の解明にあり、金融工学において数値流体力学（Computational Fluid Dynamics：以下CFD）<sup>(6)</sup>の体系を実践することにある。CMDの研究分野は大まかに基礎方程式系の構築であり、また得られた基礎方程式の離散化・スキーム開発、さらに実現象との比較・検証である。

また近年における計算機性能の発展は目覚しく、これまでも増して数値解析の有効性が示されてきている。さらに、激しい情報化の流れにより日々複雑化する金融市場を捉えるためには、計算機の活用が有効である。

## 1.2 Black-Scholes方程式と従来の研究

1973年にBlackとScholesによって発表されたBlack-Scholesモデル<sup>(7)</sup>は、金融派生商品価格の評価式であり、現在では金融分野において広く一般的に用いられている。Black-Scholesモデル等の理論評価モデルの考案により、金融派生商品の市場は大幅に広がり、現在の市場では欠かすことのできない重要な商品となっている。

Black-Scholesモデルで示されたBlack-Scholes方程式は偏微分方程式で表現されており、Mertonにより有限差分法で、またHullとWhiteによって格子モデルを用いて解かれている<sup>(8)</sup>。どちらとも1つの金融派生商品について解いた1次元モデルである。

## 1.3 本研究の目的

このような金融工学と数値解析・計算機の背景をもとにして、本研究ではCMDを確立していくことを基本方針とし、Black-Scholes方程式を移流拡散型方程式と同様にして取り扱うことによって、CFDの分野で発展してきた数値計算手法を利用し、Black-Scholes方程式を数値解析することを目的とする。

加えて、新しい試みとして本研究ではBlack-Scholes方程式に新たにトレンドという項を加えることにより、従来のBlack-Scholes方程式よりもより正確に経済物理の現象を捉えることも目的としている。さらに、従来の研究では複数個の商品の価格を予測する際には、全体を1つの商品として捉え予測を行ってきたが、本研究ではBlack-Scholes方程式を $n$ 次元に拡張することにより、複数個の商品を個々に捉え、その相関<sup>(9)(10)</sup>を考えることでポートフォリオ（資産の組合せ）といった現実的な現象を、より正確に捉えることも本研究の目的としている。

また、本研究では多くのCFDにおける数値計算手法の中から有限要素法<sup>(11)(12)(13)</sup>を選択

している。その理由として、有限要素法は関数を近似する際に形状関数を用いるという特徴が挙げられる。本研究では、具体的な形状関数に関する議論を展開していないが、将来的に従来の形状関数とは異なった形状関数を適用することで、金融における現象をより正確に把握し、経済問題を解析できるものと考えている。さらに有限要素法は計算空間に写像し計算するという特徴を持っているため、仮想的な空間における現象をも計算できることから、様々な金融現象を解析するためには非常に有効な手法であると考えている。

## 第2章 金融派生商品

### 2.1 デリバティブ

金融派生商品「デリバティブ」(Financial Derivative)<sup>(8)(10)(14)</sup>とは株式、金利などの、従来からある基本的な原資産(Underlying Asset)から派生して新しく作られた金融商品のことをいう。そのため金融派生商品の経済価値、つまり価格は原資産の価格によって決まる。原資産には、株式や為替、金利、債権など様々な金融商品が用いられる。金融派生商品として現在、先物取引(先渡取引)、オプション等の商品が市場において活発に取引されている。金融派生商品に共通する性質は取引におけるリスクを避けられることである。それぞれの商品について、どういった性質の商品であるかをここで簡単に触れておく。

まず先物取引であるが、ある商品を将来の特定の時点(満期)において、現在の時点で決めた特定の価格で受け渡すことを約定する取引である。つまり、先物を買ったのであれば、満期日にキャッシュを払いその商品を受け取る。ただし、その商品はすぐに満期時の価格で売ることができるので、満期時の価格と現在の時点で決めた価格(受け渡し価格)の差が損益となる。金融先物には金利先物・通貨先物・株式先物がある。

次にオプションであるが、これは選択売買権(オプション)という意味を持ち、先物取引に取引を実行するかどうかの選択肢がついた取り引きであるといえる。契約により一定の期日、又は一定の期間内に、あらかじめ決められた価格で商品・証券等を売買する権利のことをいう。オプションにはコールオプションとプットオプションがある。

これらの金融派生商品に対して、その価格評価式として導き出されたのがBlack-Scholes方程式である。Black-Scholes方程式は偏微分方程式で表され、さらに移流拡散型の方程式である<sup>(10)(15)</sup>。

本研究では解析モデルとしてオプションを用いている。

### 2.2 オプション

本研究でモデルとするオプション<sup>(8)(10)(16)</sup>について述べる。

オプションには先に示した通りコールオプション(call option)とプットオプション(put option)の2種類がある。

コールオプションとは、ある資産を将来の定められた期日までに、決められた価格で購入する権利のことをいい、市場価格上昇による機会損失のリスクを避けることができる。

プットオプションとは、コールオプションとは逆に売却する権利であり、実際に売却し

てしまった場合と比べて、市場価格下落リスクを避けることができる。ここで、決められた価格は行使価格(strike price , exercise price)と呼ばれ、決められた期日を満期日(maturity date)あるいは行使日(expiration date)という。またオプションにおいては、必ずしもその権利を行使しなくても良いというところに非常に大きな特徴がある。

さらに、オプションには権利の行使についてヨーロッパ型(European options)とアメリカ型(American options)の2種類がある。ヨーロッパ型とは満期日にのみ権利を行使できるオプションであり、アメリカ型とは満期日以前にいつでも権利を行使できるオプションである。本研究ではヨーロッパ型コールオプションを解析の対象としている。

次に、株式コールオプションを買った場合を例としてコールオプションのペイオフ(損益)について述べる。ただし、コールオプションとは先にも述べたように「ある資産を将来の定められた期日までに、決められた価格で購入する権利」である。

「満期日 $T=1$ ヵ月後 , 行使価格 $K=100$ 円」

ただし満期日、つまり1ヵ月後の株価を $S(T)$ とする。このとき、1ヵ月後の株価が $S(T)=120$ 円となった場合には、本来だと120円する株式を100円で購入することができる。購入した株式をすぐに売れば差し引き  $120円-100円=20$ 円の利益が発生する。逆に、 $S(T)=80$ 円となった場合には80円で買える株式を100円で購入すると損失となるため、この場合は権利を行使しない。

この例から分かるように  $S(T) > K$  であればコールオプションを行使し、 $S(T) < K$  であれば行使しない。したがって、満期日におけるコールオプションのペイオフ  $f(S,T)$  は次のように求めることができる。

$$f(S,T) = \begin{cases} S(T) - K & \cdots \text{if } S(T) > K \\ 0 & \cdots \text{if } S(T) \leq K \end{cases} \quad (2.1)$$

この式から、いずれにせよコールオプションにはなんらかの価値(プレミアム)がつくことが分かり、コールオプションを購入する場合にその値段を払うことになる。プレミアムが10円であれば、コールオプション購入時に10円を支払うことになる。それを踏まえ、この例におけるコールオプション買いのペイオフ曲線を描くと図2.1のようになる。

また、 $S(T) > K$  の状態をインザマネー(in the money)、 $S(T) = K$  の状態をアットザマネー(at the money)、 $S(T) < K$  の状態をアウトオブザマネー(out of the money)という。

Fig. 2.1: Payoff of Call Option

### 2.3 エキゾチックオプション

通常のオプションがインザマネーで満期日を迎えた場合、コールオプションの価格は  $S(T) - K$  となる。しかし、市場では先に示した基本的なオプション以外にもペイオフが原資産の価格経路に依存して決まるような複雑なオプションが開発されている。そのようなオプションを総称してエキゾチックオプション(exotic option)<sup>(8)(17)</sup>と呼び、それらは通常のペイオフとは異なった性質を持つ。

代表的なエキゾティックオプションとして、満期日までに原資産の価格がある価格を一度でも割り込めば権利が消滅するノックアウトオプション(knock-out option)や、満期日までの原資産価格の最大値で権利行使ができるルックバックオプション(look-back option)、複数の金融商品の「バスケット」を原資産とするバスケットオプション(basket option)や、ペイオフが満期日までの期間の原資産の「平均」価格に依存するアベレージオプション(average option)などが挙げられ、市場には様々なエキゾティックオプションが存在する。

### 第3章 Black-Scholes方程式

#### 3.1 価格の変動

まず、派生商品の基となる原資産の価格はどのように変動するのかを考える。

本研究では原資産に株式を用いるため主に株価について考えるが、原資産の価格の変動の動きは他のどの商品でも考え方は同じである。

価格変動の様子を数式で表すために、価格の変動を確率的変動による要素と価格変化の傾向、つまりトレンドによる要素の2つに分け、その2つの要素の足し合わせにより価格の変動を表現する。

確率的変動による要素を表すためにランダムウォーク(ブラウン運動)という動きを用いている。ランダムウォークとは、以下のような条件で表される動きのことをいう。

「 時点を  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 、その時の時系列  $Z(t_i)$  を

$$Z(t_0), Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_n)$$

としたとき、時系列の変化量

$$Z(t_k) - Z(t_{k-1}) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

は、平均0、分散  $(t_k - t_{k-1})$  の正規分布  $N(0, (t_k - t_{k-1}))$  に従う。 」

ランダムウォークの様子を図3-1にて示す。

このウィーナー過程にある傾き  $a$  を持った直線を加えることで、価格の変動を時系列  $X(t)$  によりつぎのように表現できる。

$$X(t) = at + bZ(t) \tag{3.1}$$

さらに時系列  $X(t)$  の微小時間における変化量  $\Delta X$  は、

$$\Delta X = a \Delta t + b \Delta Z \tag{3.2}$$

となる。このような時系列  $X(t)$  の動きを、一般化ウィーナー過程と呼ぶ。

この一般化ウィーナー過程の様子を図3-3にて示す。

一般化ウィーナー過程の式(3.2)において定数  $a, b$  の部分を、さらに  $X$  と  $t$  の関数  $a(X, t), b(X, t)$  に一

般化したものが式(3,3)である。

$$X = a(X, t) dt + b(X, t) dZ \quad (3,3)$$

ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$ として時間 $t$ の極限をとると以下のような式となる。

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dZ \quad (3,4)$$

この時系列 $X(t)$ の動きを伊藤の確率過程という。

ただし確率変動の項 $Z$ は連続的ではあるが微分不可能であるため、微分 $dZ$ を定義できない。しかし、この確率変動はランダムウォークに従っており、ランダムウォークは正規分布によって表されている。したがって、 $Z$ には次のような関係がある。

$$\Delta Z = \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (3,5)$$

ここで  $\Delta t \rightarrow 0$ とすると

$$dZ = \sqrt{dt} \quad (3,6)$$

これにより  $\Delta t \rightarrow 0$ としたときの  $Z$ を $dZ$ として表す。

この式(3,4)の伊藤の確率過程を用いることで様々な原資産の価格を数式で表すことができる。例えば株価におけるモデルはつぎのように表現される。

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ \quad (3,7)$$

ただし $S$ は株価を、 $\mu$ は株価の期待収益率(株価変化率)、 $\sigma$ は株価のボラティリティー(株価変動率)を表している。

式(3,7)において左辺の分母 $S$ を右辺に移項すれば

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \quad (3,8)$$

となり、 $\mu S$ と  $\sigma S$ は共に $S$ と $t$ の関数 $a(S,t), b(S,t)$ と考えられるから、この株価モデルは伊藤の確率過程に従っている。

### 3.2 伊藤のレナマ

$X$ が式(3,4)の伊藤の確率過程に従っているとき、 $X$ と $t$ の関数 $f(X,t)$ というものを新たに考える。ここで関数 $f$ の微分 $df$ は着目点まわりで2変数関数のTaylor展開を利用すると次のように表される。

$$df = \frac{f}{X} dX + \frac{f}{t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (dX)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial t} dX dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 + \dots \quad (3,9)$$

$X$ は伊藤の確率過程に従っているので、式(3,9)の $dX$ に式(3,4)を代入し、正規分布による関係を示した式(3,6)を用いると、

$$\begin{aligned}
df &= \frac{f}{X} a(X,t)dt + \frac{f}{t} b(X,t)dZ + \frac{f}{t} dt \\
&+ \frac{1}{2} \frac{^2f}{X^2} \{a(X,t)\}^2 (dt) + \frac{1}{2} \frac{^2f}{X^2} \{b(X,t)\}^2 (dZ)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \frac{^2f}{X^2} 2a(X,t)b(X,t)dt dZ \\
&+ \frac{^2f}{X t} a(X,t)(dt) + \frac{^2f}{X t} b(X,t)dt dZ \\
&+ \frac{1}{2} \frac{^2f}{t^2} (dt)^2 + \dots
\end{aligned} \tag{3,10}$$

さらに式(3,10)において1次より大きい項を切り捨てる。これにより Xが伊藤の確率過程に従っているとき、関数f(X,t)の動きは次の式(3,11)に従う。

$$df = \frac{f}{X} a(X,t) + \frac{f}{t} + \frac{1}{2} \frac{^2f}{X^2} \{b(X,t)\}^2 dt + \frac{f}{X} b(X,t)dZ \tag{3,11}$$

これが、伊藤のレンマである。

### 3.3 Black-Scholes方程式の導出

株価Sが伊藤の確率過程に従っている、つまり式(3,8)で表される株価モデルに従っているとすると前節で示した伊藤のレンマから「株価 Sによる派生商品の価格 f (S,t)の微分 df」は式(3,8)(3,11)を用いて

$$df = \frac{f}{t} + \frac{1}{2} (\sigma S)^2 \frac{^2f}{S^2} dt + \frac{f}{S} dS \tag{3,12}$$

に従う。ここで、確率変動の項 dZが含まれていると解析が困難になるため dZの項を消す操作を行う。そこで次のようなポートフォリオ を考える。

「株価Sの株式を  $\frac{f}{S}$  単位買い、価格f(S,t)の派生商品を 1 単位売る」

このポートフォリオ の価値は

$$\pi = f(S,t) - \frac{f}{S} S \tag{3,13}$$

であり、微小時間での変化量d は

$$d\pi = df - \frac{f}{S} dS \tag{3,14}$$

となる。この式(3,14)を使ってdZの項を消すことが出来る。式(3,14)右辺のdfに式(3,12)のdfを代入すれば、

$$d\pi = \frac{f}{t} + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dt \quad (3,15)$$

となって確率変動の項を消すことができ、dt時間の間このポートフォリオにはリスクがなくなっている。ここで、ポートフォリオについてリスクがないので金利をrとすれば、

$$d\pi = r\pi dt \quad (3,16)$$

となる。したがって式(3,13)(3,16)から、

$$d\pi = r f(S,t) - \frac{f}{S} S dt \quad (3,17)$$

とすることができる。この式(3,17)を先程の式(3,15)に代入し、整理すればBlack-Scholesの偏微分方程式を導くことができる。

Black-Scholesの偏微分方程式

$$r f = \frac{f}{t} + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + r S \frac{f}{S} \quad (3,18)$$

Black-Scholesの偏微分方程式は式(3,18)で示したように移流拡散型の方程式として表現されている。このBlack-Scholes方程式を次のように書きなおしてみる。

$$\frac{f}{t} = -\frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - r S \frac{f}{S} + r f \quad (3,19)$$

この式(3,19)を、流体運動を記述した方程式の代表として、次に示す1次元のNavier-Stokes方程式と比較してみる。

$$\frac{u}{t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3,20)$$

ただしuは速度、xは位置、Pは圧力、 $\nu$ は動粘性係数、 $\rho$ は密度を表している。

両式とも左辺は非定常項であり、右辺第一項は拡散項、第二項は移流項を表している。右辺第三項はNavier-Stokes方程式では圧力項を、Black-Scholes方程式ではソース項を表している。

このようにBlack-Scholes方程式は流体の運動を示す方程式と非常に似ており、Black-Scholes方程式の解析に流体運動の解析手法を用いることは非常に有効であると言える。

## 第4章 トレンド $\mu$ の考慮

### 4.1 仮定

第3章で示したようにBlack-Scholes方程式は伊藤の確率過程を基礎としている。そのため、株価Sは伊藤の確率過程に従うことが分かっており、次のように表された。

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (4,1)$$

この伊藤の確率過程において確率変動による項を無視すると、

$$dS = \mu S dt \quad (4.2)$$

このような関係が得られる。この関係では確立変動による影響を考えていない。つまり、リスクのない状態でのポートフォリオ に対しては式(4.1)の関係が成立することが分かる。ところが、第3章で示したBlack-Scholes方程式の導出においては次のような関係を仮定している。

$$dS = r S dt \quad (4.3)$$

式(4.2)(4.3)から分かるように、Black-Scholes方程式の導出では伊藤の確率過程から得られる関係とは違った仮定をしている。

#### 4.2 特性速度

次に、第3章で示した株価Sにおける伊藤の確率過程を時刻0から時刻tまで積分する。そうすると、第3章で示した伊藤のレノマを利用すれば伊藤の確率過程の積分は

$$f(S(t), t) - f(S(0), 0) = \int_0^t \left( \frac{f}{t} + \frac{1}{2} (\sigma S)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \int_0^t \frac{f}{S} dS \quad (4.4)$$

と書くことが出来る。ここで、関数fを次のように選べば

$$f(S, t) = \log S \quad (4.5)$$

式(4.4)はつぎのように表現できる。

$$\log S - \log S(0) = \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \int_0^t \sigma dZ \quad (4.6)$$

ここでZ(0)=0であるから、さらに次のように書ける。

$$\log S = \log S(0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma Z(t) \quad (4.7)$$

従って、このことから株価Sを対数空間で見た場合の期待値と分散はそれぞれ

$$E[\log S(t)] = \log S(0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \quad (4.8)$$

$$V[\log S(t)] = \sigma^2 t \quad (4.9)$$

となることが分かる。さらにこれらの時間微分を求めると以下のようなになる。

$$\frac{dE[\log S(t)]}{dt} = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (4.10)$$

$$\frac{dV[\log S(t)]}{dt} = \sigma^2 \quad (4.11)$$

したがって式(4.10)より、株価Sの対数空間での特性速度をuとすれば、

$$u = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (4.12)$$

であると言える。しかし、Black-Scholes方程式の対数空間における特性速度 $u$ は本来、

$$u = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad -(4,13)$$

であり、式(4,11)で示した株価 $S$ による対数空間での特性速度とは異なっていることが分かる。

#### 4.3 トレンド $\mu$ の考慮

4.1と4.2で述べたことから、Black-Scholes方程式が必ずしも経済物理の現象を正しく表現していないとすることができる。この節では 4.1,4.2で示した関係を用いて、Black-Scholes方程式にトレンド $\mu$ を考慮することにより、より正確に経済物理の現象を捉えていくことを目的とする。

Black-Scholes方程式を導出する際には式(4,3)の関係を仮定しているが、株価 $S$ における伊藤の確率過程においてリスクのない安全なポートフォリオを考えた場合式(4,2)を考慮すると、金利を $r$ とすれば

$$df = frdt, \quad dS = \mu Sdt \quad -(4,14)$$

という関係を仮定することができる。これによりリスクのない安全なポートフォリオについて次のような関係を得ることができる。

$$d\theta = fr - \frac{f}{S} \mu S dt \quad -(4,15)$$

この式(4,15)の关系を用い、第3章においてBlack-Scholes方程式を導出したのと同様に次に示す式(4,16)を導くことができる。

$$rf = \frac{f}{t} + \frac{1}{2} (\partial S)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} \quad -(4,16)$$

これがトレンド $\mu$ を考慮したBlack-Scholes方程式である。また、式(4,15)からBlack-Scholes方程式は、 $\mu = r$ の特別な場合での仮定であることが分かる。

#### 4.4 対数空間

ここではBlack-Scholes方程式の対数空間での特性速度を表す式(4,13)を導くと共に、トレンドを考慮したBlack-Scholes方程式の対数空間における特性速度を求め、株価 $S$ の対数空間における特性速度を表した式(4,12)と一致していることを示す。

Black-Scholes方程式とトレンド $\mu$ を考慮したBlack-Scholes方程式に変数変換を施し対数空間で表現することにより、それぞれの特性速度を求める。

変数変換には次のような式を用いる。

$$x = \log \frac{S}{K} \quad -(4,17)$$

$$\tau = T - t \tag{4,18}$$

ただし、ここでKは行使価格、Tは満期日を表している。式(4,17) (4,18)により変数変換を施すとBlack-Scholes方程式は式(4,19)のように、

$$\frac{f}{\tau} = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{f}{x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - rf \tag{4,19}$$

トレンドμを考慮したBlack-Scholes方程式は式(4,20)のように変数変換され、対数空間で表現される。

$$\frac{f}{\tau} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{f}{x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - rf \tag{4,20}$$

ここで、式(4,19)(4,20)ともに左辺は時間による非定常項を、右辺第1項は移流項を表しており、右辺第2項は拡散項であり両式とも拡散係数は $1/2 \sigma^2$ 、右辺第3項は金利rによるシンク項でfに比例している。式(4,19)(4,20)よりそれぞれの方程式の特性速度 $u'$ 、 $u''$ とすれば、それぞれの移流項からBlack-Scholes方程式では

$$u' = \frac{dx}{dt} = -\frac{dx}{d\tau} = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \tag{4,21}$$

トレンドμを考慮したBlack-Scholes方程式では

$$u'' = \frac{dx}{dt} = -\frac{dx}{d\tau} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \tag{4,22}$$

となる。式(4,21)よりBlack-Scholes方程式の対数空間での特性速度が式(4,13)のように表されることが分かる。さらに式(4,22)よりトレンドμを考慮したBlack-Scholes方程式の対数空間における特性速度は、式(4,12)で示した株価Sにおける対数空間での特性速度に等しいことが分かる。

以上のことから、トレンドμを考慮したBlack-Scholes方程式は4.1と4.2で示したBlack-Scholes方程式への指摘を改善しており、Black-Scholes方程式よりもより正確に経済物理の現象を表現しているといえる。

また、Black-Scholes方程式はトレンドμを考慮したBlack-Scholes方程式において $\mu = r$ の特別な場合であることが確認される。さらに、変数変換を施し対数空間で表現された式(4,19)(4,20)は変数変換を施す前よりも簡単に表現されているといえる。

## 第5章 n次元化

第3章で示したBlack-Scholes方程式や第4章で示したトレンドμを考慮したBlack-Scholes方程式は、ある1つの原資産に対して派生した1つの派生商品しか扱っていない。この章では複数個の原資産により派生する商品を考慮に入れ、トレンドμを考慮したBlack-Scholes方程式をn次元化していく。n次元化された方程式は、派生商品を複数個所有した際のポートフォリオなど、より現実的な場面で有効になると考えられる。

## 5.1 相 関

複数個の株式を考える場合、各々の株式が陽的には相関を持たないランダムウォークをしていると仮定して、伊藤の確率過程から

$$ds_i = S_i \mu_i dt + S_i \sigma_i dz_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (5.1)$$

という関係が成立する。ここで、確率変動項について詳細に考察する。確率変動項の創刊を考えることで、 $dz_i$ と $dz_j$ の関係を次のように書くことができる。

$$dz_i dz_j = P_{ij} dt \quad (5.2)$$

ただし、確率変動項の相関係数を  $P_{ij}$  としている。式(5.2)の関係から、 $i=j$ ならば第3章で示した正規分布の関係式(3.5)より

$$dz_i dz_i = (dz_i)^2 = dt \quad (5.3)$$

と書くことができる。このとき  $P_{ij}=1$  となり、株式  $i$  と株式  $j$  は自己相関の関係といえる。また株式  $i$  と株式  $j$  が互いに完全に独立している場合は  $P_{ij}=0$  となり無相関という。一般に、確率変動項の相関係数  $P_{ij}$  の値は未知数である。

## 5.2 n次元Black-Scholes方程式

複数個の株式により派生商品が形成されている状況を考えているので、派生商品の価格  $f$  は次のような多変数関数として表される。

$$f = f(S_1, S_2, \dots, S_n) \quad (5.4)$$

この多変数関数を着目点まわりでTaylor展開を行うと、次のように書ける。

$$df = \frac{f}{t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{f}{S_i} dS_i + \frac{1}{2} \frac{f}{t^2} (dt)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{f}{t S_i} (dt)(dS_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{f}{S_i S_j} (dS_i)(dS_j) + \dots \quad (5.5)$$

株価は伊藤の確率過程に従い式(5.1)で示されるため、式(5.1)を式(5.5)に代入し2次以上の項を無視する。ここで注意したいのが、確率変動の項には各々式(5.2)のような関係があることである。以上の事から式(5.5)を整理すると、

$$df = \frac{f}{t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} \sigma_i \sigma_j S_i S_j \frac{f}{S_i S_j} dt + \sum_{i=1}^n \frac{f}{S_i} dS_i \quad (5.6)$$

と書くことが出来る。これはn次元での伊藤のレンマである。

ここで、第3章においてBlack-Scholes方程式を導出した際と同様に、リスクの無くなるポートフォリオを考える。

$$\partial = f - \sum_{i=1}^n \frac{f}{S_i} S_i \quad (5.7)$$

したがって、ポートフォリオの微小時間における変化量dは

$$d\vartheta = df - \sum_{i=1}^n \frac{f}{S_i} dS_i \quad (5.8)$$

となる。また、金利をrとすると第4章においてトレンドμを考慮したBlack-Scholes方程式を導いた場合と同様にして、

$$df = rfdt, \quad dS_i = \mu_i S_i dt \quad (5.9)$$

とすることができたので、さらに次の関係がいえる。

$$d\vartheta = rfdt - \sum_{i=1}^n \mu_i S_i \frac{f}{S_i} dt \quad (5.10)$$

以上で示した、式(5.6)、(5.8)、(5.10)より、dを消去し整理すると次のようになる。

$$df = \frac{f}{t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j S_i S_j \frac{\partial^2 f}{\partial S_i \partial S_j} + \sum_{i=1}^n \mu_i S_i \frac{\partial f}{\partial S_i} \quad (5.11)$$

これが、トレンドμを考慮したn次元Black-Scholes方程式である。また、第4章でも述べたようにμ=rの特別な場合では、n次元Black-Scholes方程式となる。

### 5.3 対数空間

第4章で示したように、Black-Scholes方程式は対数空間へと変数変換を施すと非常に単純化される。したがって、前節で導いたトレンドμを考慮したn次元Black-Scholes方程式も対数空間へと変数変換を行う。

変数変換の方法は、第4章で行ったものと同様に次の通りである。

$$x_i = \log \frac{S_i}{K_i} \quad (5.12)$$

$$\tau = T - t \quad (5.13)$$

変数変換施した方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^n \mu_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - rf \quad (5.14)$$

この方程式には当然1次元の場合も含まれているので、今後この方程式を支配方程式として数値解析を行っていく。

## 第6章 離散化

### 6.1 時間進行法

時間進行法については、前進オイラー法を用いて離散化を行う。第5章のトレンドを考慮したn次元Black-Scholes方程式を時間進行させると、次のように表される。

$$\frac{f^{k+1} - f^k}{\Delta t} = \sum_{i=1}^n \mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \frac{f^k}{x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} \sigma_i \sigma_j \frac{2f^k}{x_i x_j} - r f^k \quad (6.1)$$

### 6.2 空間の離散化

時間進行を施した式(6.1)にGalerkin有限要素法を適用していく。有限要素法の詳しい説明は、付録Aで行う。

各辺にそれぞれ重み関数  $\delta\omega$  を乗じ、要素内で積分を行うと次の式が得られる。

$$\int_e \delta\omega \frac{f^{k+1} - f^k}{\tau} d_e = \sum_{i=1}^n \mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \int_e \delta\omega \frac{f^k}{x_i} d_e + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} \sigma_i \sigma_j \int_e \delta\omega \frac{2f^k}{x_i x_j} d_e - r \int_e \delta\omega f^k d_e \quad (6.2)$$

ここで、 $e$ は各要素を表している。重み関数が補間関数と同じ形をとるため

$$\delta\omega = N_\alpha \delta\omega_\alpha \quad (6.3)$$

$$f^k = N_\beta f_\beta^k \quad (6.4)$$

となる。2次関数の形状関数  $N_\alpha$  は次のように定義される。(表6.1)

$$N_\alpha = \frac{1}{4} (1 + \xi_\alpha \xi) (1 + \eta_\alpha \eta) \quad (6.5)$$

Table 6.1:  $\xi_\alpha$  and  $\eta_\alpha$  of 2 dimension

$\alpha$	1	2	3	4
$\xi_\alpha$	-1	1	1	-1
$\eta_\alpha$	-1	-1	1	1

式(6.3), (6.4)を用いて式(6.2)を書き直すと、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
N_\alpha N_\beta d_e \frac{f_\beta^{k+1} - f_\beta^k}{\tau} &= \sum_{i=1}^n \mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \quad N_\alpha \frac{N_\beta}{x_i} d_e f_\beta^k \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad N_\alpha \frac{N_\beta}{x_i x_j} d_e f_\beta^k \quad (6,6) \\
&- r \quad N_\alpha N_\beta d_e f_\beta^k
\end{aligned}$$

さらに式(6,6)において部分積分を行い、Stokesの定理を適用すると、

$$\begin{aligned}
N_\alpha N_\beta d_e \frac{f_\beta^{k+1} - f_\beta^k}{\tau} &= \sum_{i=1}^n \mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \quad N_\alpha \frac{N_\beta}{x_i} d_e f_\beta^k \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad N_\alpha \frac{N_\beta}{x_i} n d_e f_\beta^k \quad (6,7) \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad \frac{N_\alpha}{x_i} \frac{N_\beta}{x_j} d_e f_\beta^k \\
&- r \quad N_\alpha N_\beta d_e f_\beta^k
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $e$ は各要素の境界を、 $n$ は要素内に垂直に立てられた外向き単位法線ベクトルを表す。

ここで、質量行列  $M_{\alpha\beta}$  ・移流行列  $(A_{\alpha\beta})_i$  ・拡散行列  $(D_{\alpha\beta})_{ij}$  をそれぞれ次のように定義する。ただし、 $i, j=1, 2, \dots, n$  である。

$$M_{\alpha\beta} = \sum_e N_\alpha N_\beta d_e \quad (6,8)$$

$$(A_{\alpha\beta})_i = \sum_e N_\alpha \frac{N_\beta}{x_i} d_e \quad (6,9)$$

$$(D_{\alpha\beta})_{ij} = \sum_e \frac{N_\alpha}{x_i} \frac{N_\beta}{x_j} d_e \quad (6,10)$$

これらを用いると、離散化式は最終的に以下ようになる。

$$\bar{M}_{\alpha\beta} \frac{f_{\beta}^{k+1} - f_{\beta}^k}{\tau} = \sum_{i=1}^n \mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 (A_{\alpha\beta})_i f_{\beta}^k - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} \sigma_i \sigma_j (D_{\alpha\beta})_{ij} f_{\beta}^k - r M_{\alpha\beta} f_{\beta}^k + \alpha \quad (6,11)$$

ただし、 $\bar{M}$  は集中対角化された質量行列を意味し、 $\alpha$  は下に示した境界積分項を表している。

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} \sigma_i \sigma_j N_{\alpha} \frac{N_{\beta}}{x_i} \mathbf{n} d_{\beta} f_{\beta}^k \quad (6,12)$$

## 第7章 解析モデル

### 7.1 1次元モデル

解析モデルとして、まず1次元でのモデルを考える。

1次元のモデルでは、 $\mu = r$ の場合において計算結果がBlack-Scholes方程式の解析解(付録Bより)と一致するかを検証するとともに、トレンドを考慮したことによって計算の結果がどのように変化し、また実際の経済物理現象をより正確に表現できているのかを検証する。

解析対象は1次元であるから、計算に使用する離散化式は、第6章で示したトレンド $\mu$ を考慮したn次元Black-Scholes方程式の離散化式として1次元で記した式(7,1)を用いる。ただし、 $\alpha$ は1次元での境界積分項である。また1次元での計算であるため、式(7,1)には株式の識別記号である $i, j$ は用いていない。

$$\bar{M}_{\alpha\beta} \frac{f_{\beta}^{k+1} - f_{\beta}^k}{\tau} = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 A_{\alpha\beta} f_{\beta}^k - \frac{1}{2} \sigma^2 D_{\alpha\beta} f_{\beta}^k - r M_{\alpha\beta} f_{\beta}^k + \alpha \quad (7,1)$$

#### 7.1.1 Case 1 (1次元モデルの検証)

Case 1では計算結果がBlack-Scholes方程式の厳密解を比較、検証する。第4章でも述べたように、Black-Scholes方程式はトレンドを考慮したBlack-Scholes方程式の $\mu = r$ の特別な場合である。従って、Case 1では $\mu = r$ の条件下で計算を行い、他のすべてのパラメータを等しくして計算したBlack-Scholes方程式の厳密解と比較し、本研究で構築したスキームの検証を行う。

#### 7.1.2 Case 2 (トレンド $\mu$ による影響の検証)

Case 2 ではトレンド  $\mu$  の値を様々に変化させて計算を行い、トレンド  $\mu$  の値の違いが計算結果に与える影響を検証する。特に従来のBlack-Scholes方程式では  $\mu = r$  の仮定を用いていることから、トレンド  $\mu$  の値が負になることを理論的に想定していない。したがって、トレンド  $\mu$  の値を負として計算を行うことは、従来のBlack-Scholes方程式を用いた解析では理論的に有り得なかった新しい試みである。Case 2 でも式(7,1)を用いて計算を行う。

## 7.2 2次元モデル

次に、2次元のモデルを考える。2次元のモデルでは、原資産の個数が2つになる。これは、ある2つの原資産からそれぞれ派生する商品を両方とも持っていた場合を想定している。つまり、計算の結果は所有する派生商品2つのポートフォリオの価値を表していることとなる。2次元モデルでは、厳密解との比較と相関の値を変えた影響を検証する。

解析対象は2次元であるから、計算に使用する離散化式は、第6章で示したトレンド  $\mu$  を考慮したn次元Black-Scholes方程式の離散化式を2次元で記した式(7,2)を用いる。ただし、 $\alpha$  は2次元での境界積分項である。また、今後2次元のモデルでは、文章中で株式を識別するために株式1・株式2、あるいは株価1・株価2と表記する。

$$\begin{aligned} \frac{M_{\alpha\beta}^{k+1} - M_{\alpha\beta}^k}{\tau} &= \mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 (A_{\alpha\beta})_1 f_{\beta}^k + \mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 (A_{\alpha\beta})_2 f_{\beta}^k \\ &\quad - \frac{1}{2}\sigma_1^2 (D_{\alpha\beta})_{11} f_{\beta}^k - \frac{1}{2}\sigma_2^2 (D_{\alpha\beta})_{22} f_{\beta}^k \\ &\quad - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 (D_{\alpha\beta})_{12} f_{\beta}^k - rM_{\alpha\beta} f_{\beta}^k + \alpha \end{aligned} \quad (7,2)$$

### 7.2.1 Case 3 (2次元モデルの検証)

Case 3 では、2次元の計算結果が正確であるかを検証する。2つの原資産の間の確率変動項の相関係数が1であり、その他のパラメータも同じであれば、その2つの原資産は同じ商品であることを示している。同じ商品から派生する派生商品もまた同じ商品である。つまり同じ派生商品を2つ所有していることになる。その場合での計算結果は1次元におけるBlack-Scholes方程式の厳密解の2倍になっていなければならない。したがってCase 3 では2つの原資産の確率変動項の相関係数を1とし、その他の全てのパラメータを同じにして計算を行い、Black-Scholes方程式の厳密解の2倍した値と比較検証する。

### 7.2.2 Case 4 (相関 $\rho$ による影響の検証)

Case 4 では、複数個の派生商品を所有し、ポートフォリオを形成していた場合について詳細に検証する。2次元、つまり2つの原資産から派生した商品を所有しポートフォリオを形成した場合、2つの原資産の間の確立変動項における相関を考え、相関値  $\rho_{12}$  の変化による結果の変化を検証する。

### 7.3 初期条件

式(7,1)(7,2)において、時間を表す  $\tau$  は第4章や第5章で次のように定義した。

$$\tau = T - t \quad (7,3)$$

ここで、 $T$ は満期日である。したがって、 $\tau$  は満期日までの残存期間を表しており、満期日での価格の状態は計算上では初期条件となる。派生商品の満期日での価格は第2章で示したように以下の式で記述される。

$$f(S, T) = \begin{cases} S(T) - K & \text{if } S(T) > K \\ 0 & \text{if } S(T) \leq K \end{cases} \quad (7,4)$$

これにより、初期条件は次のように表される。

$$f(x, 0) = \begin{cases} S(T) - K & \text{if } S(T) > K \\ 0 & \text{if } S(T) \leq K \end{cases} \quad (7,5)$$

また、2次元の場合での初期条件は、先に示したように所有している2つの派生商品のポートフォリオを考えているため、それぞれの派生商品の価格を  $f_1$ 、 $f_2$  とすれば、次のように書くことができる。

$$f(x, 0) = f_1(x_1, 0) + f_2(x_2, 0) \quad (7,6)$$

ただし、それぞれの派生商品の価格は式(7,5)より

$$f(x_i, 0) = \begin{cases} S_i(T) - K_i & \text{if } S_i(T) > K_i \\ 0 & \text{if } S_i(T) \leq K_i \end{cases} \quad (7,7)$$

である。

### 7.4 境界条件

価格の変動とは閉じた空間での現象ではない。したがって、境界条件を考える際には、原資産の価格が行使価格から無限に離れている場合にはどのように記述されるのかを求め、境界条件とする。

原資産の価格が行使価格より無限に離れていると考えた場合、コールオプションの価格はその性質より

$$\lim_{S \rightarrow \infty} f(S, \tau) = 0 \quad (7,8)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} f(S, \tau) = S - K$$

と表現できる。つまりこれが、境界条件である。しかし、これでは実際に計算を行うことが出来ない。そのため本研究では、境界での原資産価格  $S$  は行使価格  $K$  から十分離れてい

ると仮定し、Black-Scholes方程式の解析解を境界での値として用いている。これにより、計算の対象を解析したい対象よりも大きく取って、解析対象に及ぼす境界を近似している影響を最小限にしなければならない。

## 7.5 解析条件

それぞれのCaseにおいて派生商品価格は満期日までの残存期間により1ヶ月物、2ヶ月物、3ヶ月物、6ヶ月物、9ヶ月物、12ヶ月物の結果を算出している。各々のCaseに用いたパラメータをTable 7-1, Table 7-2, Table 7-3, Table 7-4にて示す。ただし、Case2においてトレンド( $\mu$ )の値は $5.0 \times 10^{-3}$ 、 $1.0 \times 10^{-1}$ 、 $2.0 \times 10^{-1}$ 、 $-1.0 \times 10^{-1}$ 、 $-2.0 \times 10^{-1}$ で変化させ、Case4では相関係数 $\rho_{12}$ の値は0.0、 $5.0 \times 10^{-1}$ 、1.0、 $-5.0 \times 10^{-1}$ 、-1.0で変化させている。

Table 7-1: Parameters (Case 1)

Strike Price (K)	¥100
Interest (r)	$5.0 \times 10^{-3}$
Trend ( $\mu$ )	$5.0 \times 10^{-3}$
Volatility ( )	$5.0 \times 10^{-1}$

Table 7-2: Numerical Parameters (Case 2)

Strike Price (K)	¥100
Annual Interest (r)	$5.0 \times 10^{-3}$
Volatility ( )	$5.0 \times 10^{-1}$

Table 7-3: Parameters (Case 3)

Strike Price 1 (K1)	¥100
Strike Price 2 (K2)	¥100
Annual Interest (r)	$5.0 \times 10^{-3}$
Trend 1 ( $\mu 1$ )	$5.0 \times 10^{-3}$
Trend 2 ( $\mu 2$ )	$5.0 \times 10^{-3}$
Volatility 1 ( 1)	$5.0 \times 10^{-1}$
Volatility 2 ( 2)	$5.0 \times 10^{-1}$
Correlation Coefficient (P12)	1.0

Table 7-4: Parameters (Case 4)

Strike Price 1 (K1)	¥100
---------------------	------

Strike Price 2 (K2)	¥100
Annual Interest (r)	$5.0 \times 10^{-3}$
Trend 1 ( $\mu 1$ )	$5.0 \times 10^{-3}$
Trend 2 ( $\mu 2$ )	$5.0 \times 10^{-3}$
Volatility 1 ( $\sigma 1$ )	$5.0 \times 10^{-1}$
Volatility 2 ( $\sigma 2$ )	$5.0 \times 10^{-1}$

## 7.6 メッシュ

メッシュ分割は1次元の解析では全節点数101, 全要素数100であり、2次元の解析では全節点数10201, 全要素数10000とした。それぞれ  $S=¥1$  であり第4章や第5章で示したように式(7,9)により対数空間に変数変換して用いている。

$$x_i = \log \frac{S_i}{K_i} \quad (7,9)$$

また、時間の刻み幅は  $\tau = 1.0 \times 10^{-5}$  (year) として計算を行った。

## 7.7 計算の安定性

CFDにおいて移流拡散方程式を陽解法で解く場合、計算が安定に行われるためには、一般的にCourant数と拡散数の条件を満たさなければならない。この安定条件はそれぞれ

$$c = \frac{u \tau}{x} \leq 1 \quad (7,10)$$

$$d = \frac{2\nu \tau}{x^2} \leq 1 \quad (7,11)$$

で与えられる。ただし、 $u$ は移流速度を、 $\nu$ は拡散係数を表している。ここで、支配方程式である対数空間でのトレンド  $\mu$  を考慮したn次元Black-Scholes方程式を流体を表す式としてみた場合、移流速度  $u$  と拡散係数  $\nu$  は式 (5,14) からそれぞれ次のように表現できる。

$$u_i = -(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2) \quad (7,12)$$

$$\nu_{ij} = \frac{1}{2} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (7,13)$$

先に示した解析条件から、移流速度  $u$  の絶対値は  $1.2 \times 10^{-1} \sim 3.3 \times 10^{-1}$  の範囲、拡散係数  $\nu$  の絶対値は  $1.3 \times 10^{-2} \sim 1.3 \times 10^{-1}$  の範囲の値をとる。また、式 (7,9) から  $x$  は  $6.7 \times 10^{-3} \sim 2.0 \times 10^{-2}$  の範囲の値をとり、残存期間の刻み幅は  $\tau = 1.0 \times 10^{-4}$  である。これらより、Courant数と拡散数による安定条件を満たしていることがわかる。

## 第8章 解析結果とその検討

### 8.1 解析結果

各Caseにおける解析結果を順に示す。すべてのCaseにおいて、満期日までの残存期間により1ヶ月物・2ヶ月物・3ヶ月物・6ヶ月物・9ヶ月物・12ヶ月物を計算し、順に示す。また、Case1とCase3においては1次元と2次元における満期日の状態もそれぞれ示す。

#### 8.1.1 Case1の結果

Case1では、1次元での計算を行いBlack-Scholes方程式の厳密解と比較している。Case1の結果は図8.1に示す。横軸は株価を示し、縦軸はそのときの派生商品の価格とBlack-Scholes方程式の厳密解を表している。

#### 8.1.2 Case2の結果

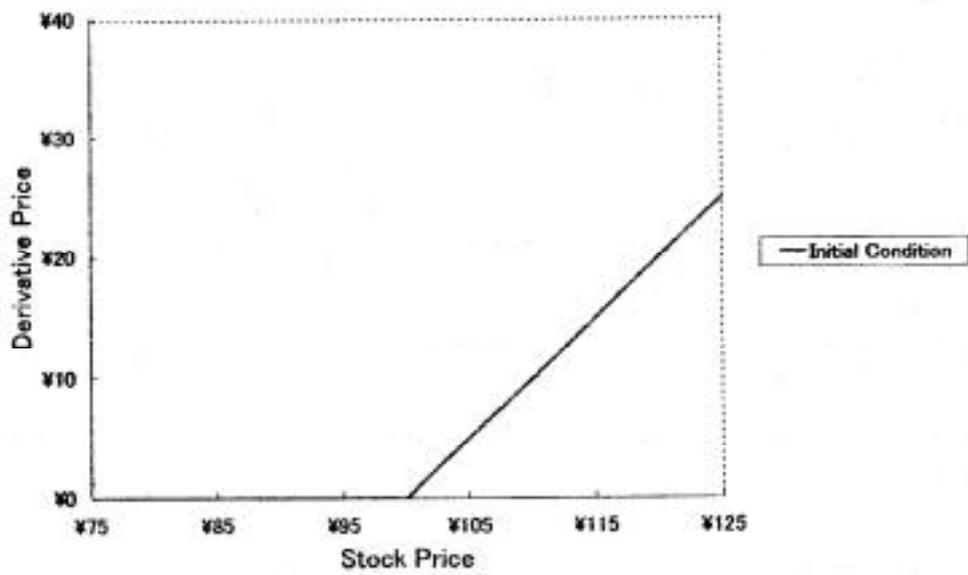
Case2では、トレンド $\mu$ の値を変化させその違いを比較している。Case2の結果は図8.2で示す。横軸は株価を示し、縦軸はそのときの派生商品の価格を表している。

#### 8.1.3 Case3の結果

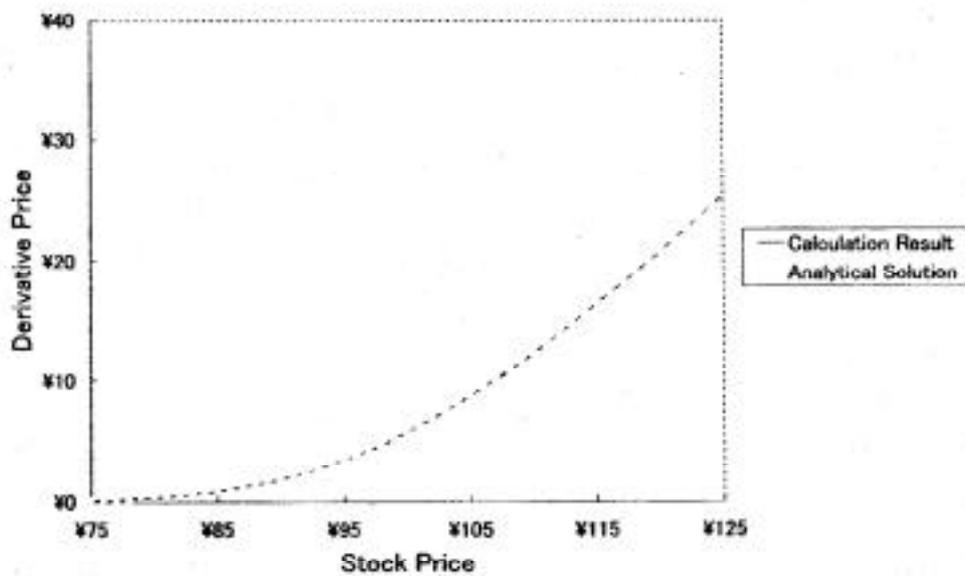
Case3では2次元計算を行い、確率変動項による相関 $\rho_{12}$ の値を1.0とし、さらにすべてのパラメータを等しくすることで、Black-Scholes方程式の厳密解を2倍にしたものと比較している。なお、図8.3は2次元での計算結果をそのまま示しており、底辺の軸が株価1と株価2、壁面の軸が派生商品の価格をそれぞれ表している。図8.4では、株価1と株価2が同じ値をとる点つまり、株価1と株価2との対角方向を抜き出し、その点での派生商品の価格とBlack-Scholes方程式の厳密解を2倍したものとを比較している。横軸が株価1と株価2の値を、縦軸が派生商品の価格とBlack-Scholes方程式の厳密解を2倍したものを表している。

#### 8.1.4 Case4の結果

Case4では、2次元の計算において確率変動項による相関 $\rho_{12}$ の値を変化させ、その様子を検証している。Case4での結果は図8.5に示しており、図8.4と同様に横軸が株価1と株価2の対角方向の値を、縦軸がそのときの派生商品の価格を表している。

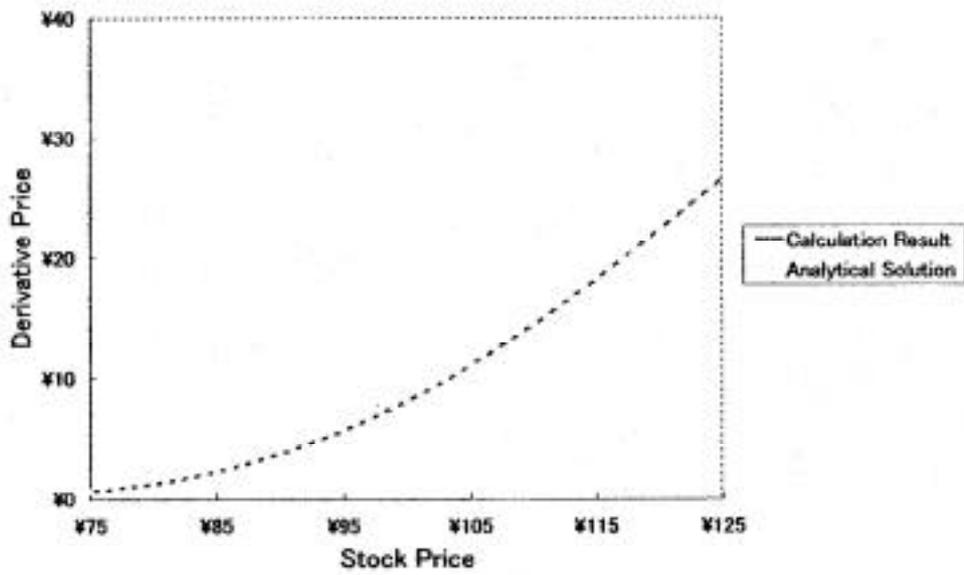


(a) At Maturity Date

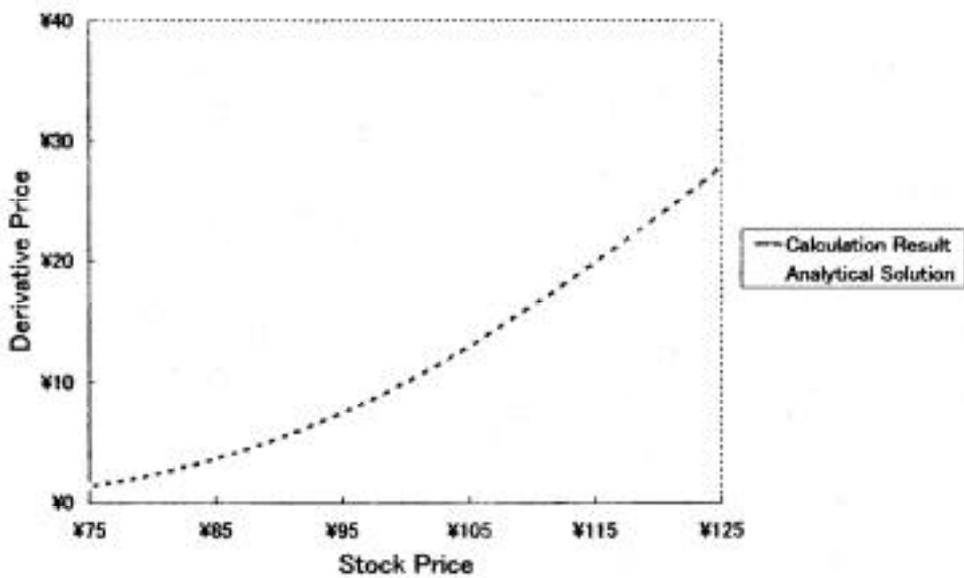


(b) Maturity : 1 Month

Fig. 8-1(1) : Comparisons between Calculation Result and Exact Solution (Case 1)

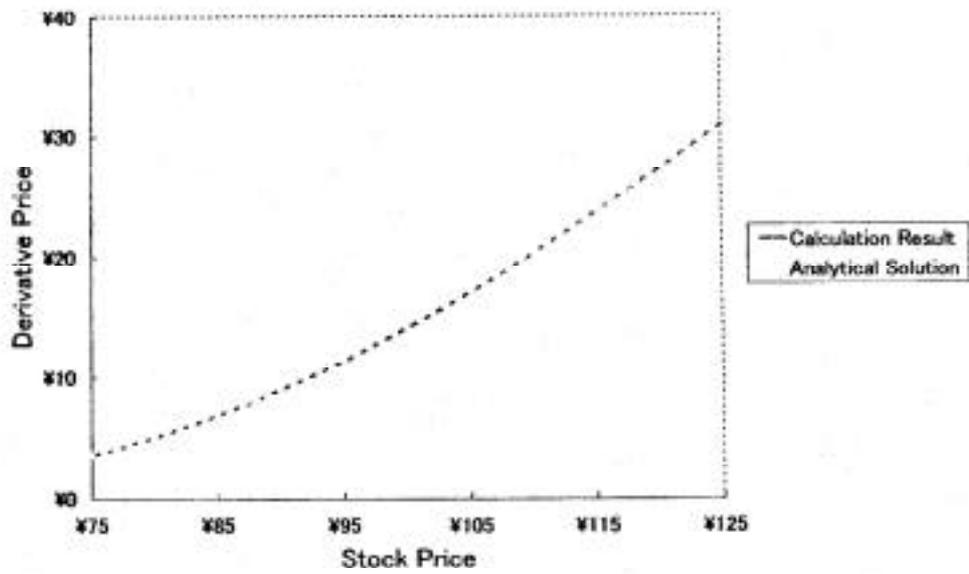


(c) Maturity : 2 Months

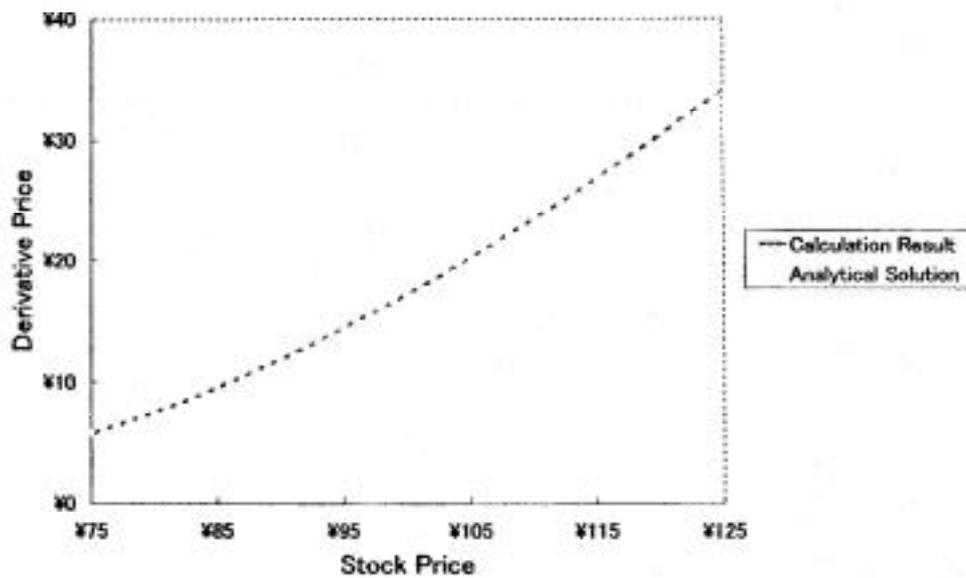


(d) Maturity : 3 Months

Fig. 8-1(2) : Comparisons between Calculation Result and Exact Solution  
(Case 1)

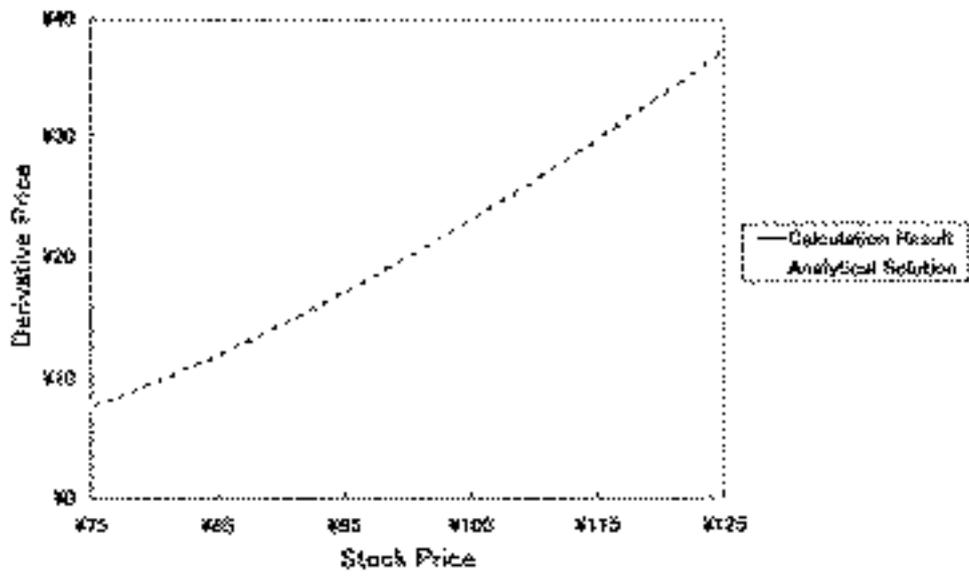


(e) Maturity : 6 Months



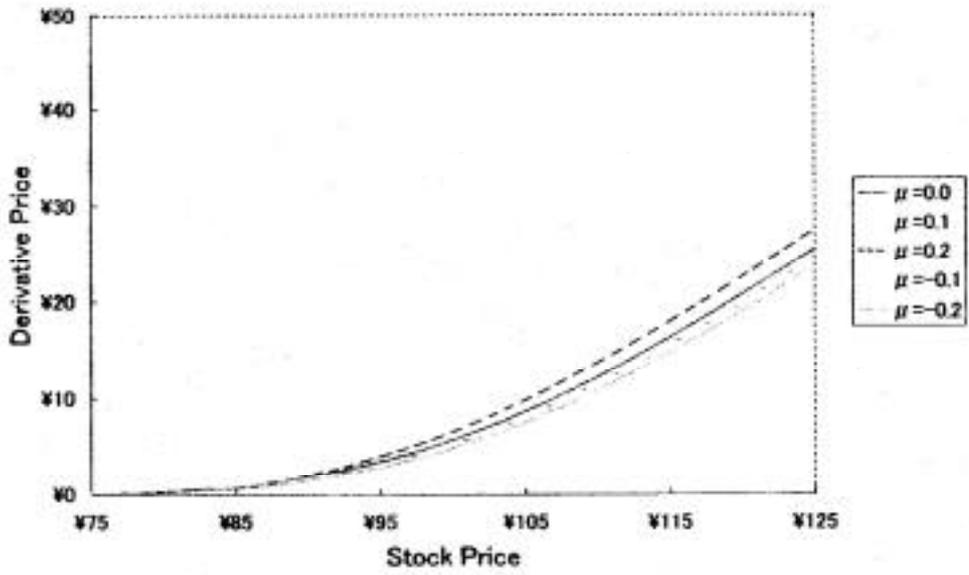
(f) Maturity : 9 Months

Fig. 8-1(3) : Comparisons between Calculation Result and Exact Solution (Case 1)

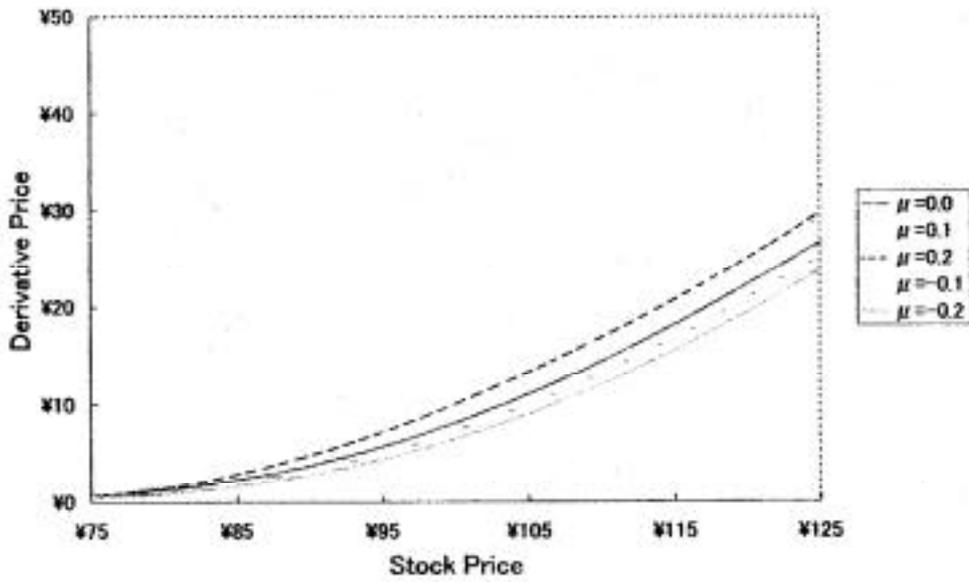


(g) Maturity : 12 Months

Fig. 8-1(4) : Comparisons between Calculation Result and Exact Solution (Case 1)

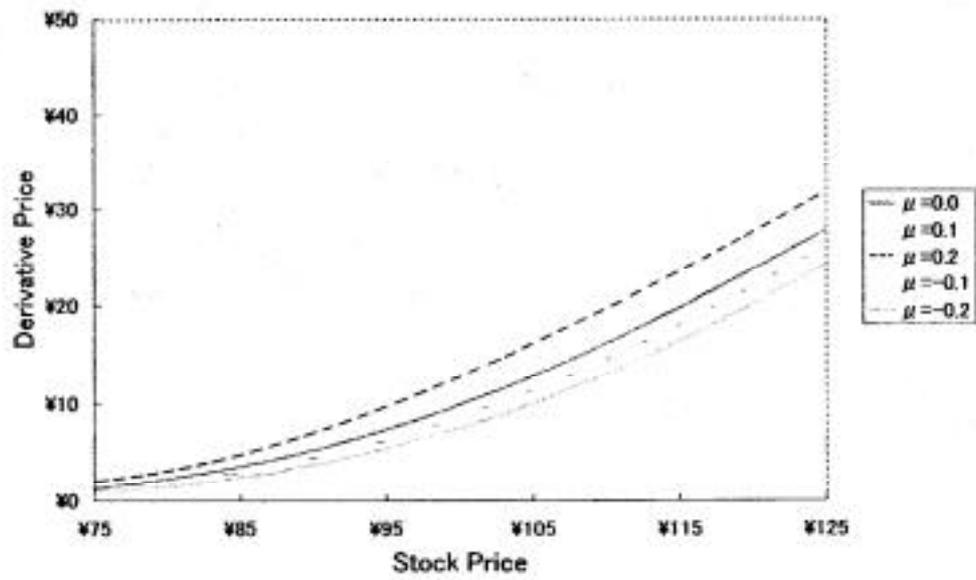


(a) Maturity : 1 Month

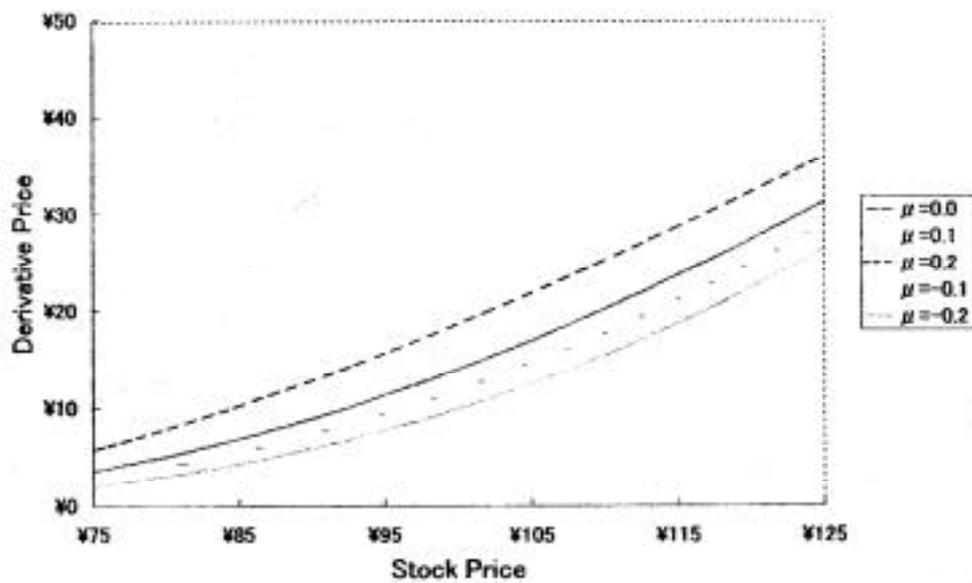


(b) Maturity : 2 Months

Fig. 8-2(1) : Comparisons of Derivative Price using different Trend (Case 2)

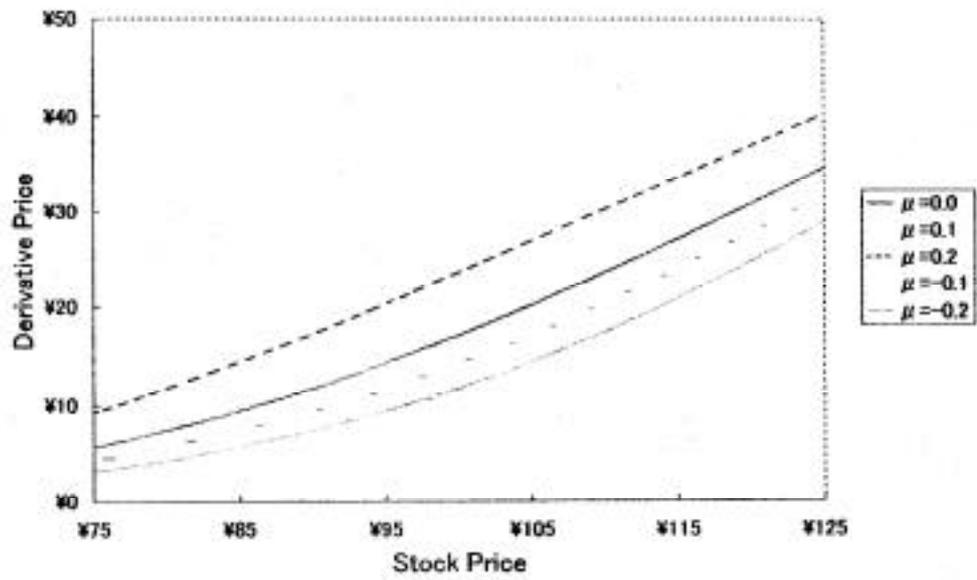


(c) Maturity : 3 Months

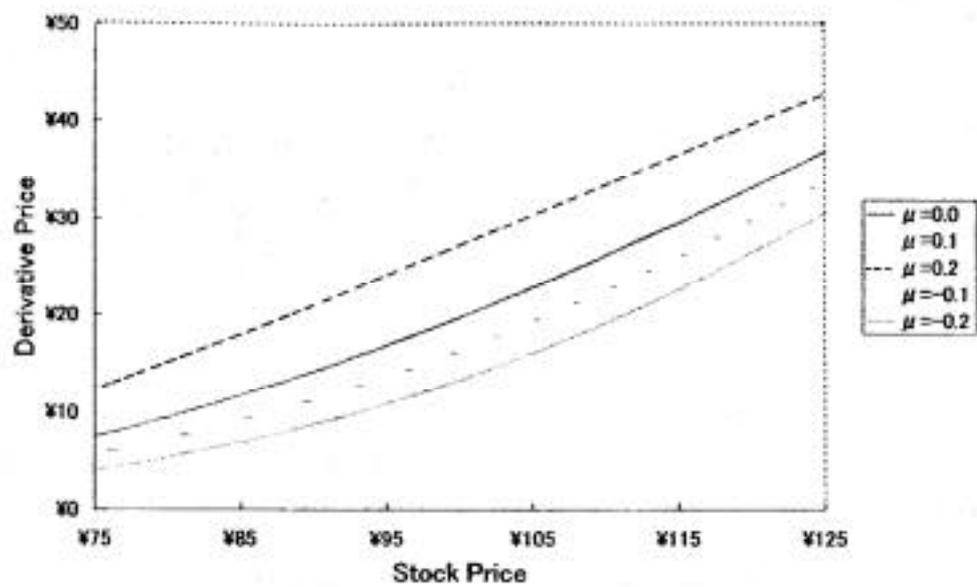


(d) Maturity : 6 Months

Fig. 8-2(2) : Comparisons of Derivative Price using different Trend (Case 2)

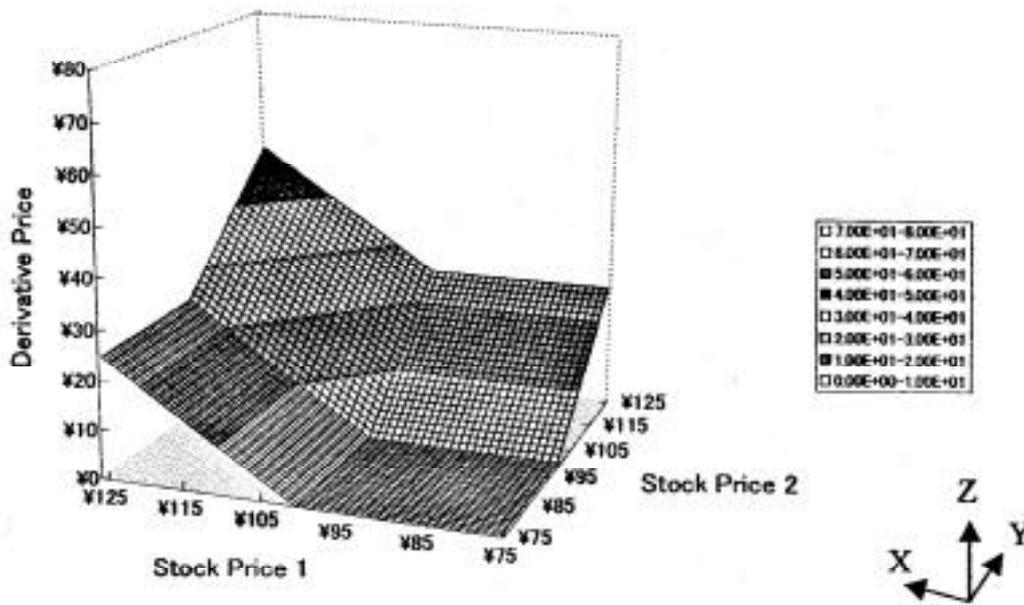


(e) Maturity : 9 Months

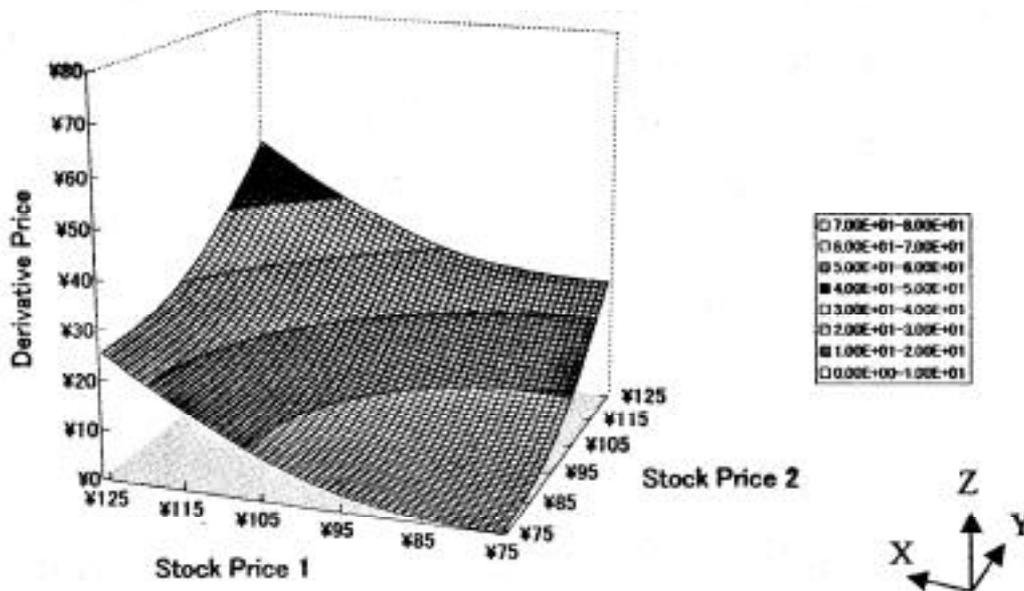


(f) Maturity : 12 Months

Fig. 8-2(3) : Comparisons of Derivative Price using different Trend (Case 2)

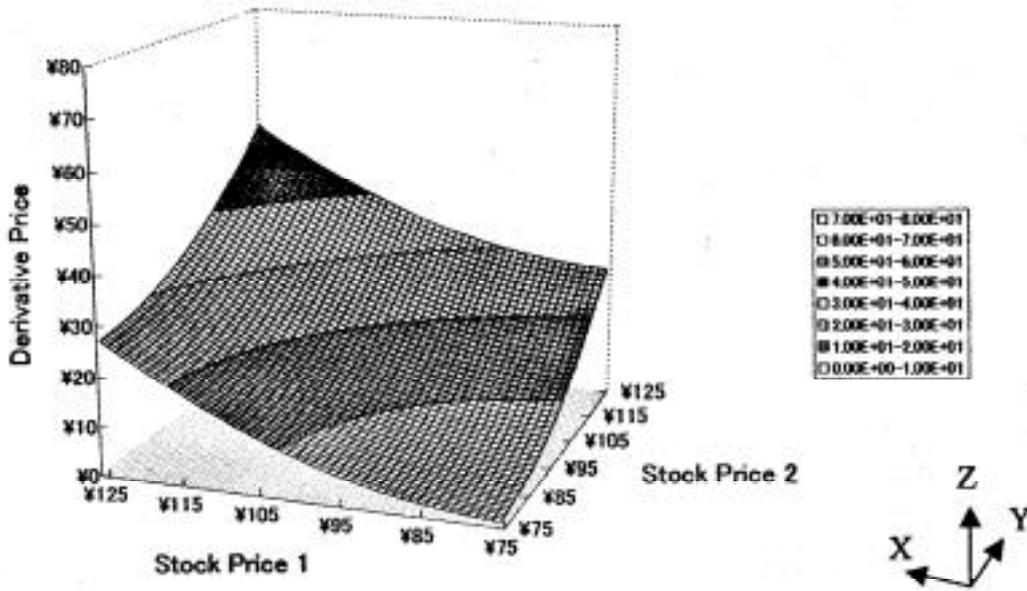


(a) At Maturity Date

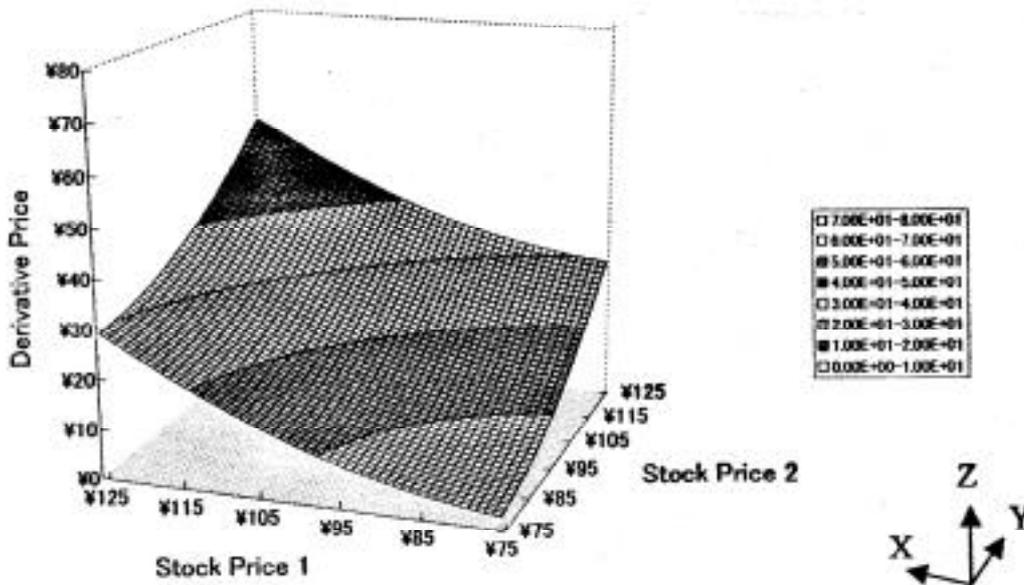


(b) Maturity : 1 Month

Fig. 8-3(1) : Calculation Result (Case 3)

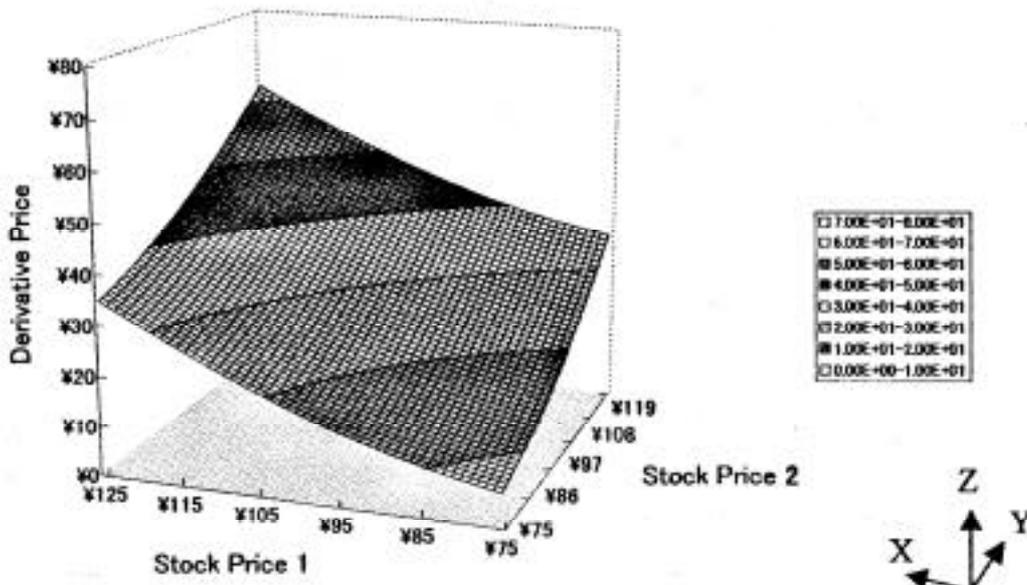


(c) Maturity : 2 Months

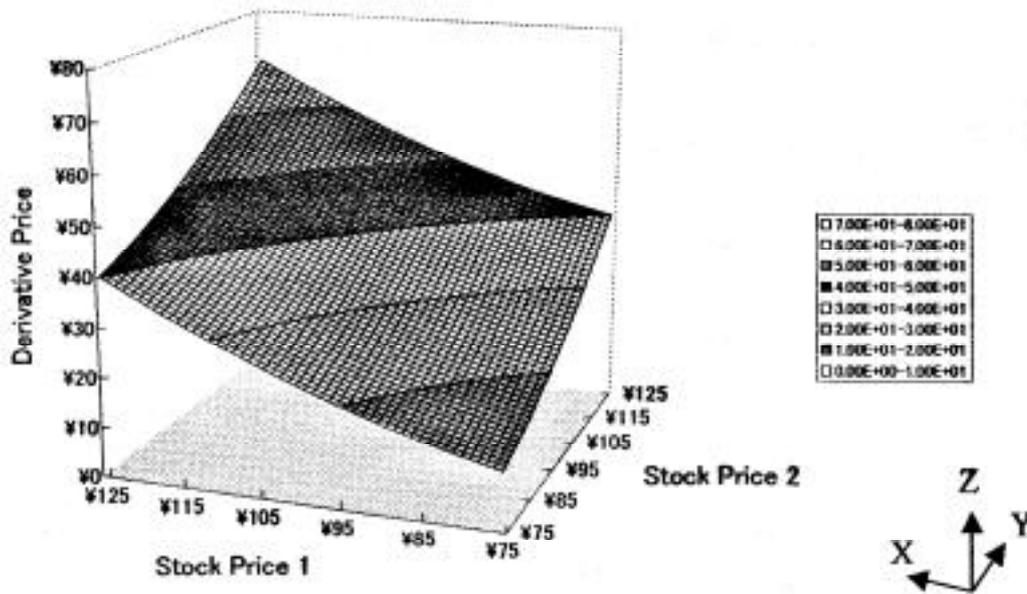


(d) Maturity : 3 Months

Fig. 8-3(2) : Calculation Result (Case 3)

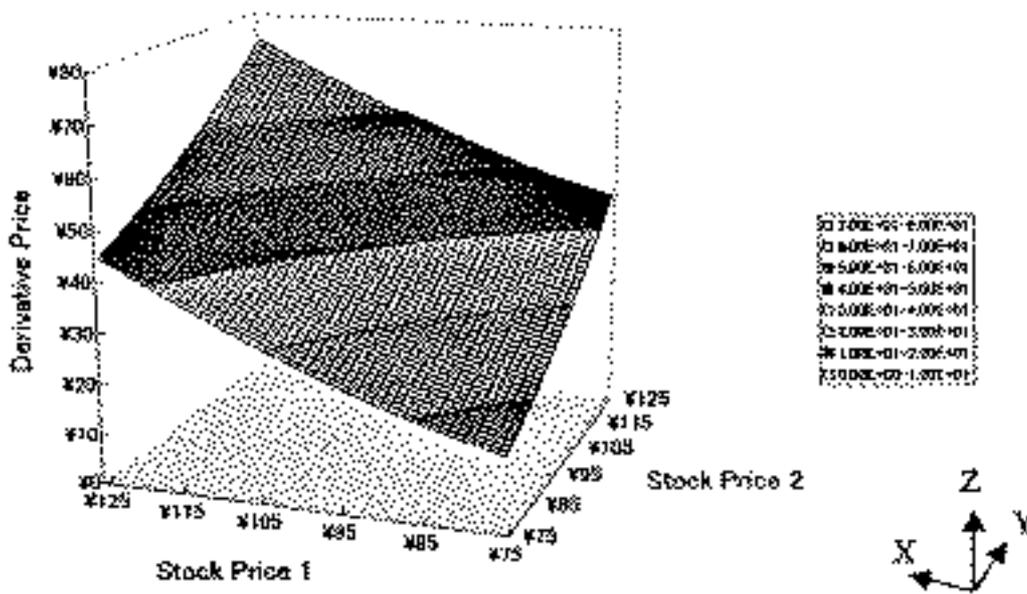


(e) Maturity : 6 Months



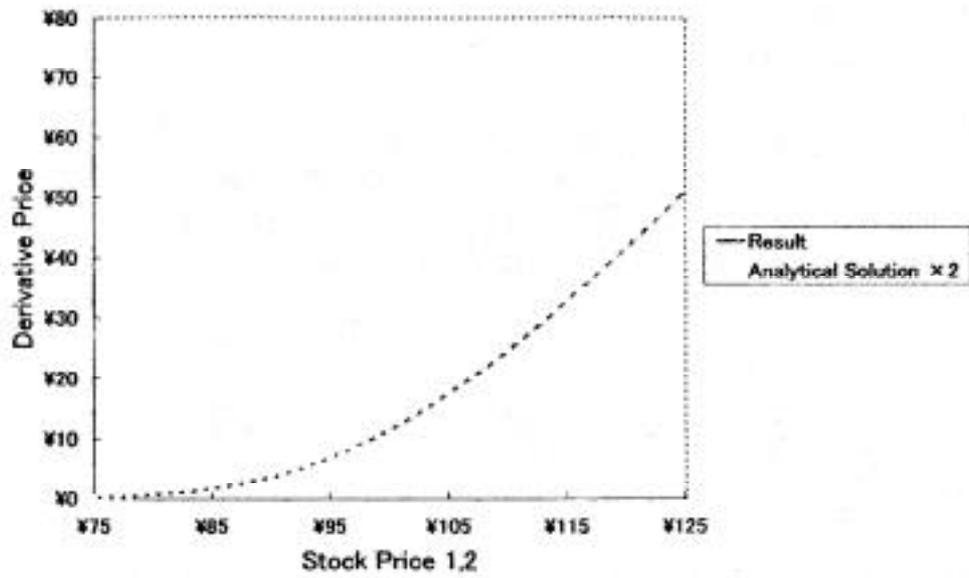
(f) Maturity : 9 Months

Fig. 8-3(3) : Calculation Result (Case 3)

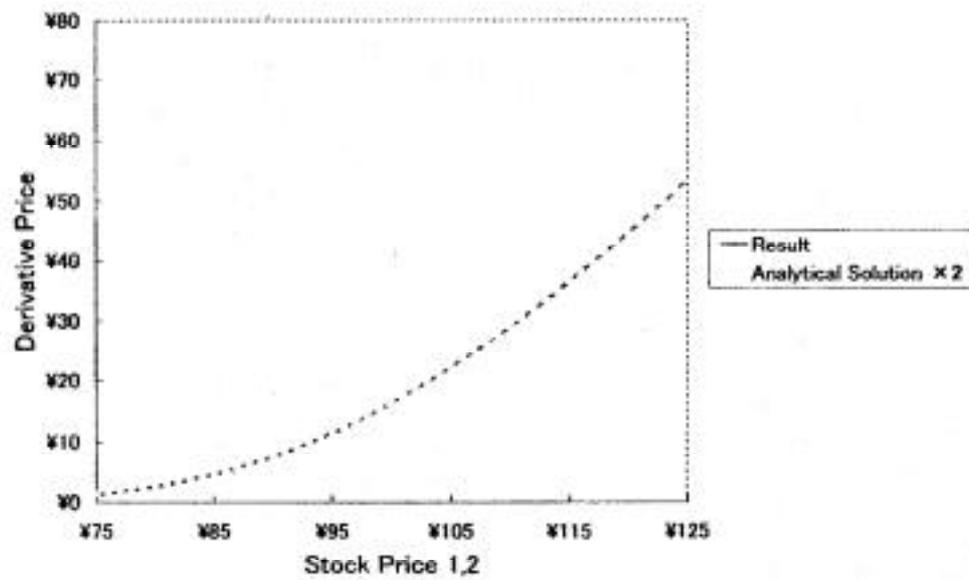


(g) Maturity : 12 Months

Fig. 8-3(4) : Calculation Result (Case 3)

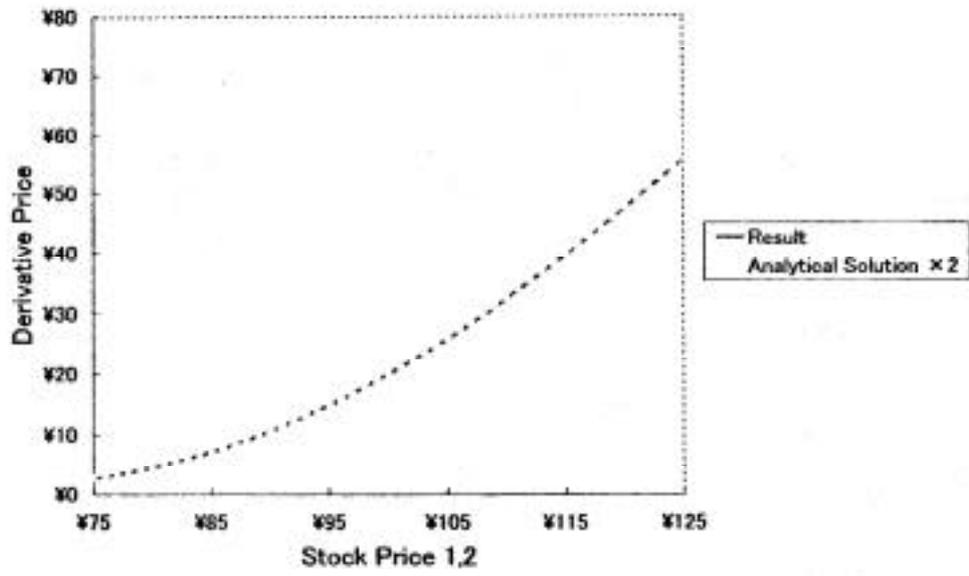


(a) Maturity : 1 Month

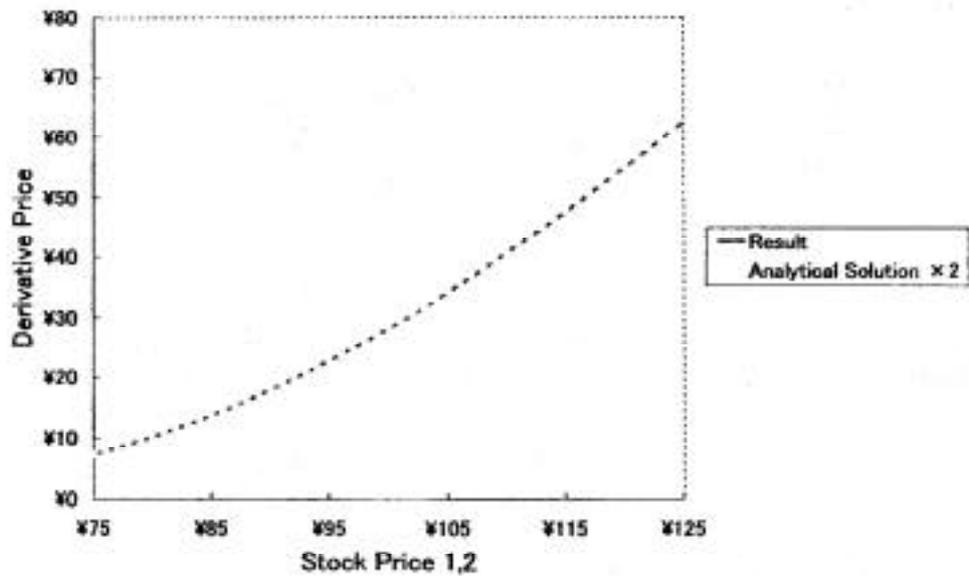


(b) Maturity : 2 Months

Fig. 8-4(1) : Comparisons between Opposite angle of Calculation Result and Exact Solution (Case 3)

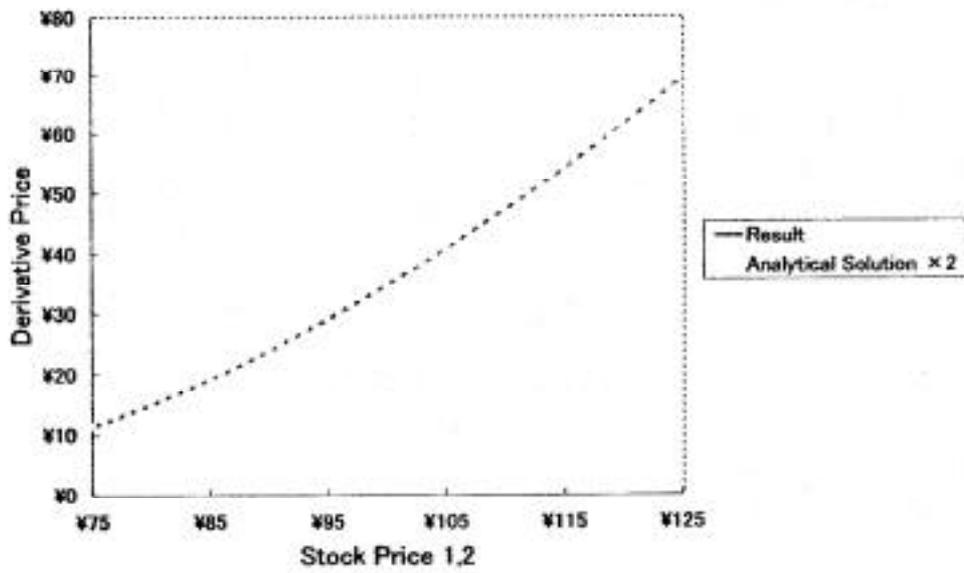


(c) Maturity : 3 Months

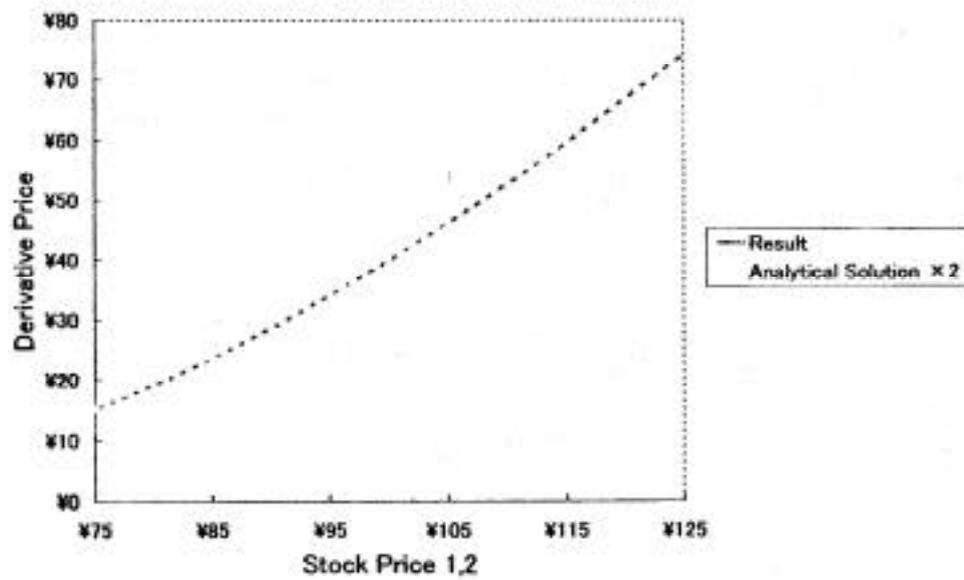


(d) Maturity : 6 Months

Fig. 8-4(2) : Comparisons between Opposite angle of Calculation Result and Exact Solution (Case 3)

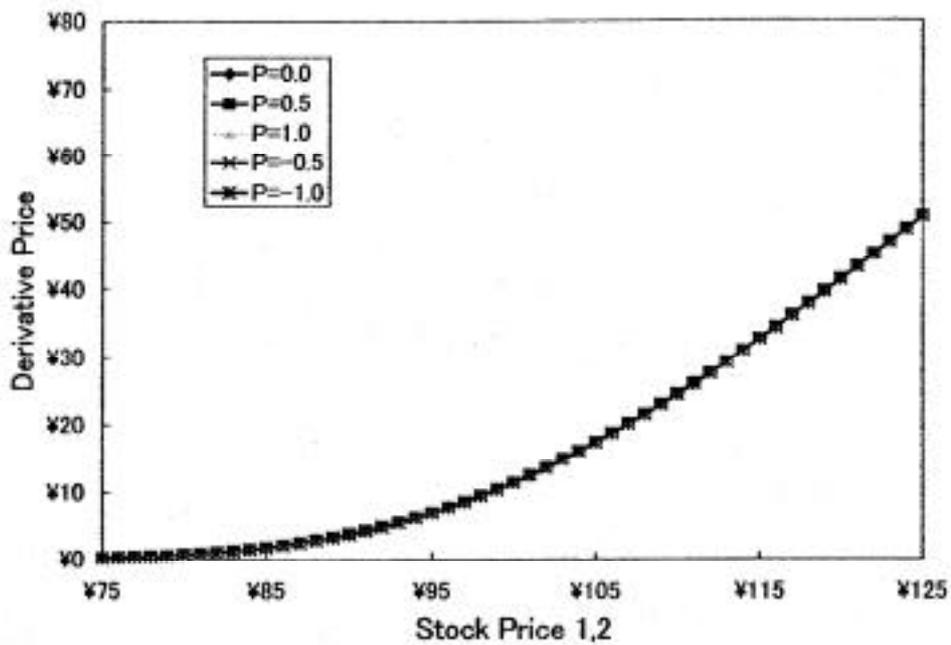


(e) Maturity : 9 Months

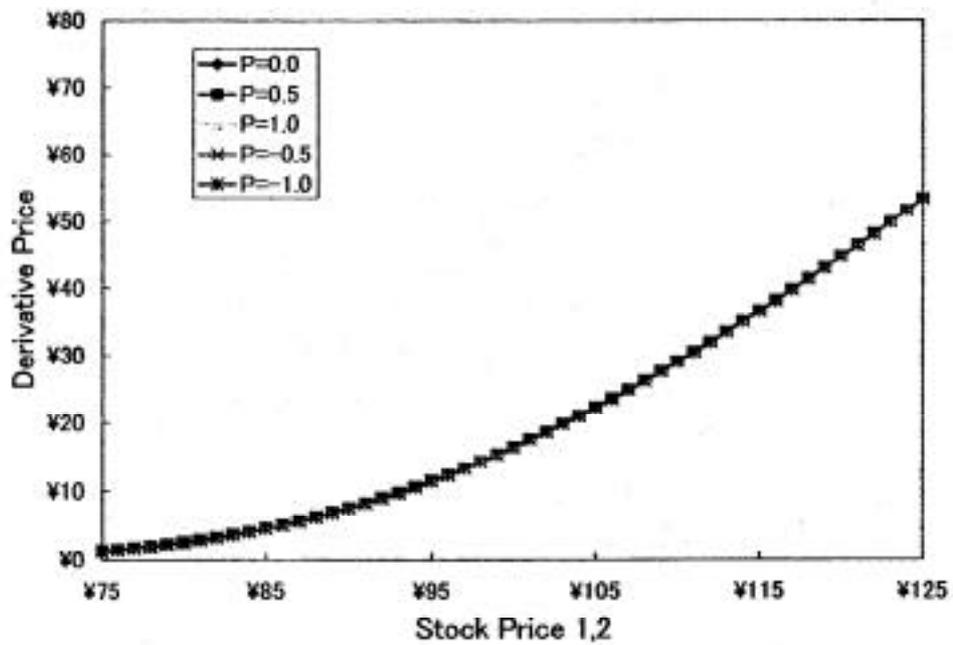


(f) Maturity : 12 Months

Fig. 8-4(3) : Comparisons between Opposite angle of Calculation Result and Exact Solution (Case 3)

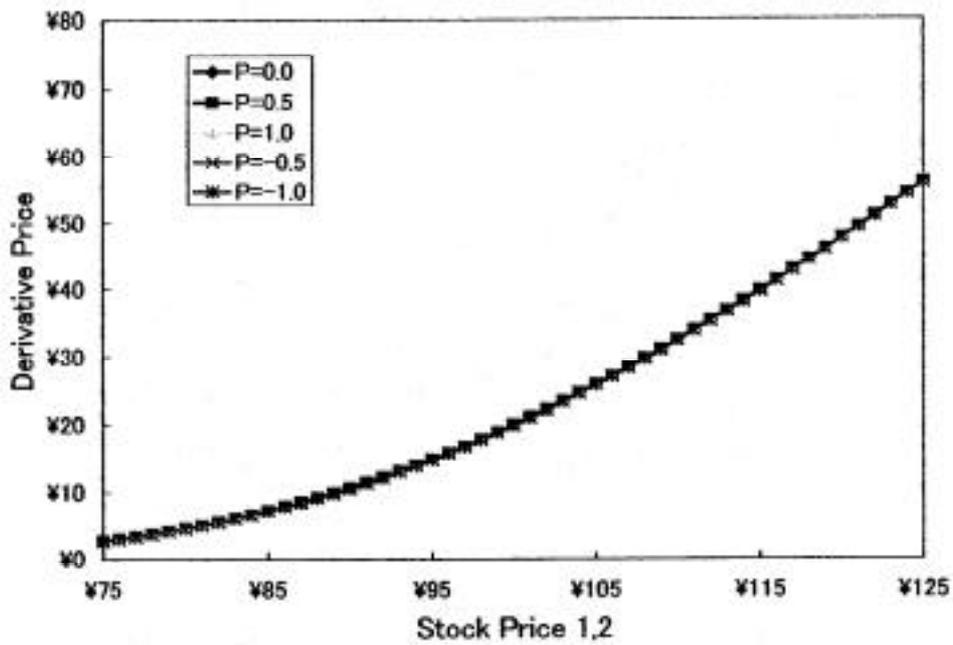


(a) Maturity : 1 Month

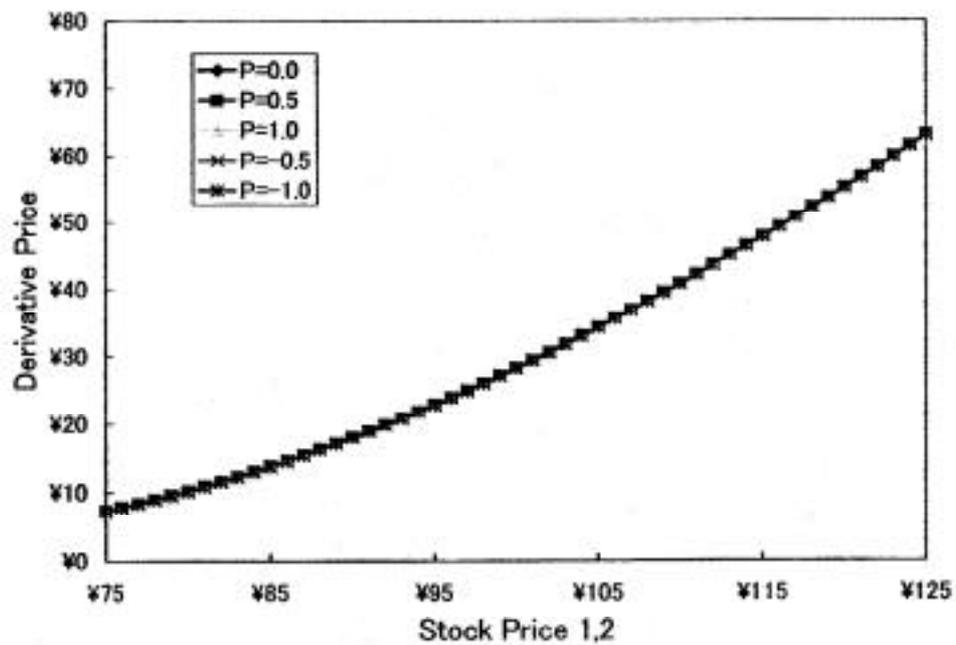


(b) Maturity : 2 Months

Fig. 8-5(1) : Comparisons of Derivative Price using different Correlation Coefficient at Opposite angle of Calculation Result (Case 4)

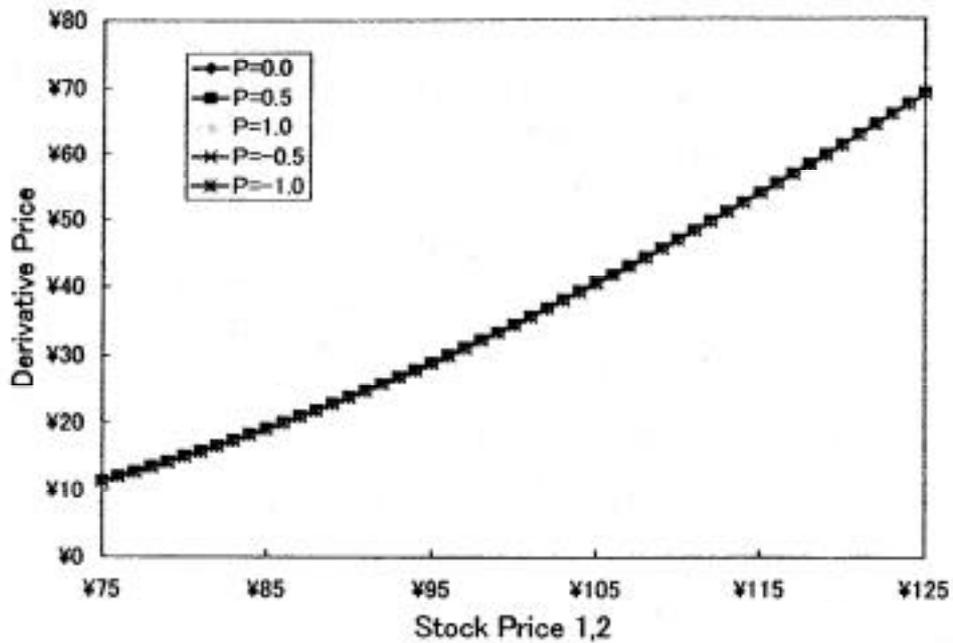


(c) Maturity : 3 Months

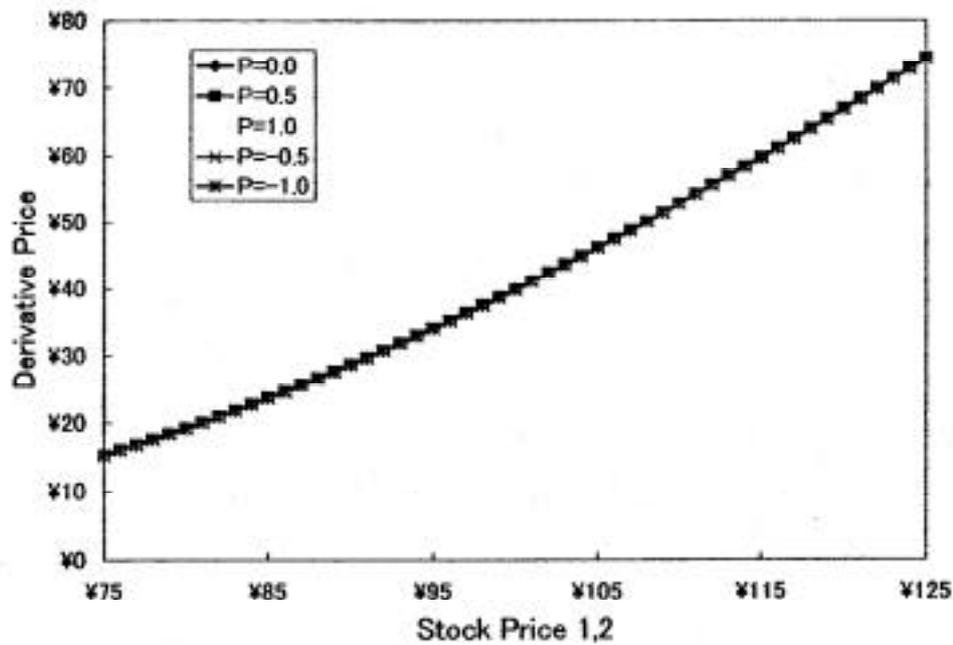


(d) Maturity : 6 Months

Fig. 8-5(2) : Comparisons of Derivative Price using different Correlation Coefficient at Opposite angle of Calculation Result (Case 4)



(e) Maturity : 9 Months



(f) Maturity : 12 Months

Fig. 8-5(3) : Comparisons of Derivative Price using different Correlation Coefficient at Opposite angle of Calculation Result (Case 4)

## 8.2 検 討

各 Caseにおける解析結果を受けて順に検討していく。

### 8.2.1 Case 1 における検討

図8.1は1次元での計算結果をBlack-Scholes方程式の厳密解と比較している。グラフに示されているように、計算結果はすべての残存期間においてBlack-Scholes方程式の厳密解と良好に一致していることがわかる。このことから、本研究で構築した1次元スキームの有効性が確認できる。

また、満期までの期間が長くなればなるほどオプションの価格が上昇していることがグラフから確認できる。これは、満期日、つまり権利行使時においてはオプションの価格は「本源的な価値」(intrinsic value)で表されるが、満期までの期間があればその分の「時間価値」(time value)が付随するためである。

### 8.2.2 Case 2 における検討

図8.2に示されているように、トレンド  $\mu$  の値を様々に変えることでその差異がはっきり現れており、その差異は満期までの期間が長くなるにつれ次第に大きくなっている。これは、満期までの期間が長いほど株価の不確実性が増し、それぞれの株式のトレンド  $\mu$  による期待度が変化することで、その差異が大きくなっていくと考えられる。

次に、トレンド  $\mu$  の値がそれぞれどのように結果に影響を与えているかを検討する。Black-Scholes方程式では  $\mu = r$  を仮定しているため、トレンド  $\mu$  の影響を考える上でのトレンド  $\mu$  の値の基準は、金利  $r$  と等しく  $\mu = 5.0 \times 10^{-3}$  の場合である。従って、トレンド  $\mu$  と金利  $r$  の相違に対するトレンド  $\mu$  の影響を検討する。

まず、トレンド  $\mu$  の値が金利  $r$  より大きい場合、つまり  $\mu = 1.0 \times 10^{-1}$ 、 $2.0 \times 10^{-1}$  の場合について検討する。図8.2のグラフから共に、すべての残存期間において  $\mu = 5.0 \times 10^{-3}$  の場合よりも派生商品の価格があがっていることがわかる。また、 $\mu = 1.0 \times 10^{-1}$  の場合に比べ、 $\mu = 2.0 \times 10^{-1}$  の場合では、派生商品の価格が上回っている。このことから、トレンド  $\mu$  の値が金利  $r$  の値と比較して大きくなればなるほど、派生商品の価格は  $\mu = r$  の場合より上昇すると考えられる。

逆に、トレンド  $\mu$  の値が金利  $r$  より小さく、さらに負である場合、つまり  $\mu = -1.0 \times 10^{-1}$ 、 $-2.0 \times 10^{-1}$  の場合において検討する。図8.2のグラフから共に、すべての残存期間において  $\mu = 5.0 \times 10^{-3}$  の場合よりも派生商品の価格が下がっていることが分かる。さらに  $\mu > r$  の場合と同様に、 $\mu < r$  の場合でも、トレンド  $\mu$  の値が金利  $r$  の値と比較して小さくなればなるほど、派生商品の価格は  $\mu = r$  の場合より下回ると考えられる。これらの結果は離散化式(8.1)と照らし合わせることで理解できる。

$$\bar{M}_{\alpha\beta} \frac{f_{\beta}^{k+1} - f_{\beta}^k}{\tau} = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 A_{\alpha\beta} f_{\beta}^k - \frac{1}{2} \sigma^2 D_{\alpha\beta} f_{\beta}^k - r M_{\alpha\beta} f_{\beta}^k + \alpha \quad (8.1)$$

この式(8.1)において、トレンド  $\mu$  が影響する項は右辺第1項の移流項のみである。  $\mu = r$

の場合を基準として考えた場合，トレンド  $\mu$  の値が大きければ単純に右辺の値が大きくなる。逆に，トレンド  $\mu$  の値が小さければ単純に右辺の値が小さくなる。式 (8,1)において，右辺の値が残存期間刻み幅における派生商品価格の増加分を表しているため，その結果  $\mu > r$  であれば派生商品の価格は  $\mu = r$  の場合より増加し， $\mu < r$  であれば減少する。さらに，トレンド  $\mu$  の値と金利  $r$  の値との差が大きければ大きい程，派生商品の価格において  $\mu = r$  の場合からの差が大きくなる事が分かる。

Case2においては，トレンド  $\mu$  以外のパラメータすべてが等しいため，「本源的な価値」が等しい。したがって得られた結果から，トレンド  $\mu$  の値が大きくなることで「時間価値」が増え，逆にトレンド  $\mu$  の値が小さくなることで，「時間価値」が減ることが分かる。

しかし，金利  $r$  の値とトレンド  $\mu$  の値が大きく違う場合においては，境界の値として Black-Scholes 方程式の厳密解を用いている影響は無視できない。Case2では，トレンド  $\mu$  の値が  $2.0 \times 10^{-1}$  と  $-2.0 \times 10^{-1}$  の場合において，満期までの期間が長くなるにつれ，境界条件として Black-Scholes 方程式の厳密解を用いている影響が確認できる。

### 8.2.3 Case 3 における検討

Case3では，図8.3において価格全体の動きを，図8.4においては株価1と株価2の対角成分を抜き出し，Black-Scholes 方程式の厳密解の2倍との比較を表している。Case3では株式1と株式2において，すべてのパラメータを等しくして計算を行っているため，株価1と株価2において派生商品価格の動きの対称性が図8.3より確認できる。これは，株式1と株式2がまったく同一の株式であるという条件での解析に起因しているためである。つまり，対称でなければ計算が上手く行われていないことを表している。

さらに図8.4で示した対角成分を Black-Scholes 方程式の厳密解を2倍したものと比較した結果から，計算結果が厳密解の2倍と良好に一致していることが確認できる。このことから，本研究で構築した2次元スキームの有効性が確認される。

### 8.2.4 Case 4 における検討

Case4では，相関係数  $\rho_{12}$  の値を5つの場合で計算しているが，図8.5からその相違を確認することはできない。その原因について，それぞれの相関係数の場合で詳細に検討する。

まず，相関係数  $\rho_{12} = 1.0$  の場合について考察する。この場合はCase3で解析した自己相関の場合である。つまり，株式1，株式2ともにまったく同じ商品という場合を計算している。この結果は，Black-Scholes 方程式厳密解の2倍に相当することは既にCase3で述べた。

次に，相関係数  $\rho_{12} = 0.0$  の場合について考察する。この場合において，2つの株式の関係を詳しく検討する。まず，2つの株式の間の相関係数が  $\rho_{12} = 0.0$  であるから，2つの株式は一般的に無相関，つまり完全に独立して動いている。しかし，この計算においては株式1と株式2のすべてのパラメータが一致している。したがって，まったく同じ性質であるが，独立して動いている2つの株式派生商品を所有していることになる。よって，この場合で

の派生商品のポートフォリオは独立した2つの派生商品を所有している状態に対応し、結果的に相関係数  $\rho_{12} = 1.0$  の場合と同様に、Black-Scholes方程式の厳密解の2倍と一致することが分かる。

最後に、残りの相関係数の場合について考察する。グラフから残りの  $\rho_{12} = 5.0 \times 10^{-1}$ 、 $-5.0 \times 10^{-1}$ 、 $-1.0$  の場合でも上に記した2つの場合と計算の結果が一致していることが確認できる。つまり、これらの場合においても Black-Scholes方程式の厳密解の2倍と一致している。しかしながらこの場合、経験的な見地、あるいは感覚的に Black-Scholes方程式の厳密解の2倍と一致しないといえる。計算結果が実現象をうまく記述していないことについて検討する。そこで、第5章で相関係数を導入した式を確認する。

$$dZ_{idZ_j} = \rho_{ij} dt \quad -(8.2)$$

確率変動項の相関係数  $\rho_{ij}$  はこの式(8.2)により導入したが、この相関係数  $\rho_{ij}$  の値は、自己相関の場合と無相関の場合以外では一般的に未知数である。つまり、自己相関と無相関の場合以外で相関係数  $\rho_{ij}$  の値は、どのように決定されるかは分かっていない。そのため、相関係数  $\rho_{ij}$  の値がどのような要因に影響を受けて決定されるかは分からない。したがって、相関係数  $\rho_{ij}$  の値が1.0と0.0の場合での計算結果は先に示した通り正しいといえるが、相関係数  $\rho_{ij}$  に1.0と0.0以外の値を用いた場合での解析においては用いた方程式に不備がある。

現在のところ、確率変動項の相関係数  $\rho_{ij}$  の値を決定する有効な式は導かれていない。しかし、確率変動項の相関係数  $\rho_{ij}$  の値を決定する式を導くことができれば、多次元でのポートフォリオ問題に対してより有効な解析結果が得られると思われる。相関係数決定式に対しては、トレンド  $\rho_{ij}$  による影響が重要であると考えられる。

### 8.3 無次元数

流体解析において重要な Reynolds 数について考察する。Reynolds 数は慣性力と粘性力の比を表す無次元数であり、次のように定義される。

$$Re = \frac{uD}{\nu} \quad -(8.3)$$

ただし、ここで  $D$  は代表長さである。この Reynolds 数を金融市場にあてはめて考えると、この代表長さ  $D$  に  $x$  を用いた場合長さが無次元量となり、移流速度  $\mu$  と拡散係数  $\nu$  から金融市場における Reynolds 数は、

$$Re = \frac{\mu}{\sigma^2} \quad -(8.4)$$

と考えることができる。  $\sigma^2$  が  $\mu$  より相対的に大きかった場合には粘性が支配的であり、その逆では移流が支配的となる。

金融市場におけるReynolds数は、市場の状態を特徴づけるパラメータになる可能性があり、今後さらなる実地検証が重要であると考えられる。

## 第9章 結 言

### 9.1 結 言

- Black-Schoels方程式にトレンド  $\mu$  を考慮する理論を導出し、従来のBlack-Schoels方程式では想定されていない金利  $r$  にあたる項が負の場合を考えることができた。
- Black-Schoels方程式を多次元に拡張する理論を導出することができた。
- Black-Schoels方程式の数値解析に有限要素法を適用し、Case1、Case3の結果から、本研究で構築したスキームの有用性を確認できた。
- Case2の結果より、Black-Schoels方程式にトレンド  $\mu$  を考慮した場合における計算ができ、有効な解析結果を得ることができた。
- Case2の結果より、トレンド  $\mu$  の値が金利  $r$  の値から大きく離れると、境界にBlack-Schoels方程式の厳密解を用いている影響があるといえる。
- Case4の結果から、本研究で導いた  $n$  次元Black-Schoels方程式は、自己相関と無相関の場合において有効性が確認できたが、その他の相関の場合には、更なる相関決定式が必要であるといえる。

### 9.2 今後の課題

今後の課題としては、まず第一に相関係数を決定する式を導き、それを用いて多次元ポートフォリオ問題を解くことがあげられる。本研究では、2次元までの問題について数値解析を行ったが、現実の市場では派生商品のポートフォリオは何十種類にもおよぶ。そのため、より現実的な問題に対応するために更なる多次元化での解析が必要であると考えられる。

さらに、有限要素法の特徴である形状関数について、新しい形状関数を開発することにより、金融市場のダイナミクスをより正確に捉えていくことがあげられる。加えて、金融市場においてCFDにおける保存則の理論に相当する法則を導き出すことにより、経済問題に対してCFDのように体系だてて解決にあたることができると考えられる。

また、本研究では、計算の過程で境界条件としてBlack-Schoels方程式の厳密解を用いているが、その影響を避けるために境界付近での計算結果を除く必要がある。この方法では効率が悪いばかりでなく、トレンド  $\mu$  と金利  $r$  の値が離れている場合などには精度も悪

くなるため、境界条件の与え方について更なる研究が必要である。

本研究ではヨーロッパ型オプションについてのみ解析を行ったため、アメリカ型オプションについても解析が必要である。アメリカ型オプションの解析はその性質からより解析が困難であるといえ、更なる研究が必要である。

また、数値解析を行う上で、プログラムの効率化・高速化・汎用化は必要不可欠な要素である。

#### 【参考文献】

- (1) 野口悠紀雄・藤井真理子 金融工学～ポートフォリオ選択と派生資産の経済分析～、(2000)、ダイヤモンド社
- (2) 刈屋武昭 金融工学は燃えている 資本の効率的利用を究極まで追求 今こそ経済学、(2000)、毎日新聞社
- (3) 前田文彬 金融工学の救世主、(2000)、日本評論社
- (4) M.O'Hara Market Microstructure Theory,(1995),Blackwell Publishers Ltd.
- (5) 尹熙元・棚橋隆彦 Computational Market Dynamicsの提案、(2000)、計算工学講演会論文集
- (6) 棚橋隆彦 はじめてのCFD、(1996)、コロナ社
- (7) F.Black and M.Scholes The Pricing of Options and Corporate Liabilities,(1973),  
*Jornal of Political Economy.*
- (8) 木島正明・長山いづみ・近江義行 ファイナンス工学入門 第1部、(1996)、日科  
技連
- (9) 刈屋武昭 金融・証券計量分析の基礎と応用、(1990)、東洋経済新報社
- (10) 蓑谷千鳳彦 よくわかるブラック・ショールズモデル、(2000)、東洋経済新報社
- (11) 棚橋隆彦 流れの有限要素法解析。、(1997)、朝倉書店
- (12) 棚橋隆彦 流れの有限要素法解析「、(1997)、朝倉書店

- (13) 志水清孝・鈴木昌和 常微分・偏微分方程式ノート、(1995)、コロナ社
- (14) 森真・藤田岳彦 確率・統計入門 数理ファイナンスへの適用、(1999)、講談社
- (15) 石村貞夫・石村園子 金融・証券のためのブラック・ショールズ微分方程式、(1999)、東京図書
- (16) 辰巳憲一 デリバティブと新金融商品の数学 基本と応用、(1995)、東洋経済新報社
- (17) S.N.Neftci 投資工学研究会誌 ファイナンスへの数学～金融デリバティブの基礎～、(1999)、朝倉書店
- (18) 伊藤雄二 微分積分学、(1984)、朝倉書店

付録A 有限要素法

有限要素法とは、全領域を三角形などの小領域（これを要素と呼ぶ）に分割し、各要素のまわりのごく狭い範囲でのみ0でない値をもつ基底関数を構成し、与えられた問題の解を Galerkin法によって計算する方法の総称である。

基底関数には区分的多項式が使用され、これが0でない値をもつ領域がごく狭い範囲に限られることが有限要素法の著しい特徴である。要素への分割はいろいろな形状が考えられるが、いずれの場合にも領域が重なり合ったり、隙間ができたりしてはならない。

また、今後行う微分による計算の表記を簡単にするために、次のような偏微分作用素  $L$  を定義する。

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{A,1}$$

したがって次のような方程式(A,2)は

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \quad (x,y) \tag{A,2}$$

偏微分作用素  $L$  を用いて次のように書くことが出来る。

$$Lu - f = 0 \tag{A,3}$$

A.1 弱形式(変分原理)

つぎのような最小化問題を考える。

最小化問題 [ P ]

「汎関数

$$J[u] = \frac{1}{2} \langle Lu, u \rangle - \langle f, u \rangle \tag{A,4}$$

を境界条件

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{A,5}$$

のもとで最小にするような関数  $u(x)$  を見つけよ。ただしここで、 $L$  は正定対称な線形作用素であり、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は内積

$$\langle y, z \rangle = \int_0^1 y(x)z(x) dx \tag{A,6}$$

を表す。」

まずこの最小化問題の必要条件を求める。最小化問題 [ P ] の解を  $u(x)$  とする。また  $w(x)$  を  $w(0)=w(1)=0$  を満たす任意の関数とする。いま  $\alpha$  を任意の実数とし、 $u + \alpha w$  なる関数を考えると、これは式(A,5)を満たす。 $J[u]$  は最小値だから

$$J[u + \alpha w] - J[u] \geq 0 \tag{A,7}$$

がなりたつ。 $u + \alpha w$  を式(A,4)に代入し式(A,7)を計算すると

$$J[u + \alpha w] - J[u] = \frac{1}{2} \langle L(u + \alpha w), u + \alpha w \rangle - \frac{1}{2} \langle Lu, u \rangle - \langle f, u + \alpha w \rangle + \langle f, u \rangle \tag{A,8}$$

$$= a \{ \langle Lu, w \rangle - \langle f, w \rangle \} + \frac{1}{2} a^2 \langle Lu, w \rangle = 0$$

となる(ただしここで、Lの対称性 $\langle Lu, w \rangle = \langle u, Lw \rangle$ を用いている)。

| |が十分に小さいときは の1次項が支配的で  $a^2$ の項は無視できる。

しかしこの項は $\langle Lu, w \rangle - \langle f, w \rangle$ と の符号次第で正にも負にもなりうる。また  $a^2$ の項はLの正定性から、 $\langle Lu, w \rangle \geq 0$ である。したがって式(A,8)を満たすためには、

$$\langle Lu, w \rangle - \langle f, w \rangle = 0 \tag{A,9}$$

でなければならない。

式(A,9)は弱形式と呼ばれ、その解を弱解という。また、ここで用いられた関数wは試験関数と呼ばれる。

次に弱形式で表された以下のような問題を考える。

弱形式問題 [ Q ]

$$r \quad w(0) = w(l) = 0 \tag{A,10}$$

を満たす任意のwに対して弱形式

$$\langle Lu, w \rangle = \langle f, w \rangle \tag{A,11}$$

を成立させ、しかも

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{A,12}$$

を満たすような関数u(x)を見つけよ。 」

最小化問題 [ P ] と弱形式問題 [ Q ] は常に等価であるが、最小化問題 [ P ] を解くことと弱形式問題 [ Q ] からwを取り去って得られる問題、すなわち区間 [ 0,1 ] で与えられた関数f=f(x)に対して方程式

$$Lu(x) = f(x) \tag{A,13}$$

$$b.c. \quad u(0) = u(l) = 0 \tag{A,14}$$

を満足するu(x)を求める問題は一般に等価ではない。すなわち、微分方程式(A,13)(A,14)が成立すれば弱形式問題式(A,11)(A,12)は成立するが、逆は成立しない。

したがって弱形式問題の方が広い問題を扱っていることになり、その意味で弱解と呼ばれる。以下の偏微分方程式の近似解法では、最小化問題 [ P ] または弱形式問題 [ Q ] がその指導原理として用いられる。

また、この議論は非同次ディリクレ型境界条件の場合

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_1 \tag{A,15}$$

でも成り立つ。

## A.2 Galerkin法

偏微分方程式の近似解法では、まず、求めるべき未知関数u(x)を近似する関数(近似関数)の形を定める。ここで、xは独立関数のベクトルで、例えばx=(x,y)やx=(x,t)であり、uはスカラー関数である。

最も普通の方法は、近似関数を既知の関数の1次結合とし、その近似関数が $u(x)$ をできるだけ精度よく近似するように1次結合の係数を決定する方法である。すなわち近似関数 $\hat{u}(x)$ を次の形に定める。

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i \phi_i(x) \quad \text{-(A,16)}$$

ここで  $\phi_i(x), i=1,2,\dots,n$  は基底関数と呼ばれ互いに1次独立である。また  $\hat{a}_i$  は未知の結合係数である。基底関数をうまく選べば、 $n$  が大きいほど $\hat{u}(x)$ は $u(x)$ をより良好に近似できる。

Galerkin法は弱形式を指導原理としている。すなわち、弱形式を基本方程式にとって、偏微分方程式の近似解がその解になるように近似解を構成する方法である。

Galerkin法で解くべき方程式は

$$\langle L\hat{u}, \hat{w} \rangle = \langle f, \hat{w} \rangle \quad \text{-(A,17)}$$

$$b.c. \hat{u} = g \quad \text{on } \Gamma \quad \text{-(A,18)}$$

である(ただし $L$ は対称作用素とする)。

$u$ に対する近似解 $\hat{u}$ を式(A,17)(A,18)を満たすように決める。近似関数 $\hat{u}(x)$ を基底関数  $\phi_i$  の1次結合

$$\hat{u}(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i \phi_i(x) \quad \text{-(A,19)}$$

$$\Omega \text{ on } \Gamma \phi_0 = g, \quad \phi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{-(A,20)}$$

の形にとり、試験関数 $\hat{w}(x)$ はこれと似た形

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i \phi_i(x) \quad \text{-(A,21)}$$

にとる。 $\hat{a}_i$  も  $\Omega$  上で0である。

任意の $\hat{w}$ が  $\phi_i(x), i=1,2,\dots,n$  の1次結合で表現できることに注意すれば、式(A,17)(A,18)を解くことは結局

$$\langle L\hat{u}, \phi_i \rangle = \langle f, \phi_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{-(A,22)}$$

$$b.c. \hat{u} = g \quad \text{on } \Gamma \quad \text{-(A,23)}$$

を解くことに帰着される。式(A,22)より連立1次方程式が得られ、行列形式に表現すると式(A,24)のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc}
\langle L\phi_1, \phi_1 \rangle & \langle L\phi_2, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle L\phi_n, \phi_1 \rangle & \alpha_1 & \langle f, \phi_1 \rangle & \langle L\phi_0, \phi_1 \rangle \\
\langle L\phi_1, \phi_2 \rangle & \langle L\phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle L\phi_n, \phi_2 \rangle & \alpha_2 & \langle f, \phi_2 \rangle & \langle L\phi_0, \phi_2 \rangle \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\langle L\phi_1, \phi_n \rangle & \langle L\phi_2, \phi_n \rangle & \cdots & \langle L\phi_n, \phi_n \rangle & \alpha_n & \langle f, \phi_n \rangle & \langle L\phi_0, \phi_n \rangle
\end{array} = 0 \quad \text{-(A,24)}$$

このように弱形式の方程式(A,11)(A,12)を式(A,17)(A,18)のように近似し、その近似した方程式を  $i$  について解いて近似解  $\hat{u}$  を求める方法が Galerkin 法である。

### A.3 重み付き残差法

偏微分方程式が作用素方程式で

$$Lu(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{-(A,25)}$$

と与えられているとする。右辺が0になるのは、 $u$ が偏微分方程式の真の解だからである。もし  $u$  が近似解  $\hat{u}$  であれば、偏微分方程式は厳密には満たされないで誤差が生じ、右辺は0にはならない。この誤差を残差と呼び  $R$  で表す。

$$R(\hat{u}(\mathbf{x})) = L\hat{u}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \quad \text{-(A,26)}$$

この残差  $R$  がある重み関数  $\phi_i(\mathbf{x}), i=1,2,\dots,n$  と直交するように近似関数のパラメータを決定する方法を、重み付き残差法という。このことは、 Galerkin 法の弱形式(A,17)において、試験関数  $\phi_i$  が  $\phi_i$  とは別の基底関数  $\phi_i$  によって定義された場合とも考えられる。

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(\mathbf{x}) \quad \text{-(A,27)}$$

式(A,27)であるならば、重み付き残差法の最適パラメータ決定式は

$$\langle L\hat{u} - f, \phi_i \rangle = \left\langle L\phi_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i, \phi_i \right\rangle = 0, \quad i=0,1,2,\dots,n \quad \text{-(A,28)}$$

である。

重み付き残差法において、重み関数を様々に選ぶことによって各種解法が得られる。まず、重み関数に1を選ぶと有限体積法となる。次に、重み関数に形状関数を選ぶと有限要素法であり、重み関数を基本解とすれば境界要素法となる。

### A.4 形状関数

Galerkin法においては、近似関数は基底関数の1次結合として

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(\mathbf{x}) \quad \text{-(A,29)}$$

と与えられる。基底関数を用いた表現は数学的に便利だが、有限要素法を実際問題に適用するときには、 $\phi_i(\mathbf{x})$ の全体像よりはむしろ分割した要素内に  $\phi_i(\mathbf{x})$ を制限した部分に注目し、各要素ごとに計算する方が効率がよい。

重み付き残差法とは基底関数  $N_i$  に重み関数  $u_i$  を用い、さらに有限要素法では、重み関数に形状関数  $N_i$  を用いている。したがって、有限要素法を考えていく上で形状関数は非常に重要である。

以下では1次元領域を線分要素に分割し、線形補間する場合を例にとり、1次元の形状関数を考えていく。ある1つの線分要素  $e$  の2頂点、すなわち節点の番号を  $i, i+1$  とする。 $N_i(x)$  を節点  $i$  で1、その他の節点で0となるような区分的多項式とする。このとき、要素  $e$  において形状関数が0でない値をとるのは  $N_i, N_{i+1}$  だけだから、区分的1次式の形状関数に基づく有限要素解の  $e$  内における形は

$$\hat{u}(x)_e = u_i N_i(x) + u_{i+1} N_{i+1}(x) \quad \text{-(A,30)}$$

で与えられる。ただしここで、 $u_i, u_{i+1}$  はそれぞれの節点上での関数  $u(x)$  の値とする。このとき、全区間での近似関数は式(A,31)のように表され、折れ線で Fig.A-1 のように近似される。

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^n u_i N_i(x) \quad \text{-(A,31)}$$

したがって節点  $i, i+1$  間の近似直線は次のようになる。

$$\hat{u}(x)_e = u_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + u_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{-(A,32)}$$

各要素で考えると、この1次元線形補間での形状関数は

$$N_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & [x: x_{i-1} \leq x < x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & [x: x_i \leq x < x_{i+1}] \\ 0 & [\text{otherwise}] \end{cases} \quad \text{-(A,33)}$$

で与えられる。この形状関数を Fig.A-2 で示す。

#### A.5 写像関数

物理空間においてある領域を有限の要素で分割した際に、個々の形状は異なる。そこで有限要素法ではそれぞれの要素を写像によって規格化することで形式を統一化し単純化する。

以下では、形状関数の時と同様に1次元の場合での写像関数について考える。計算空間  $\xi$  から物理空間  $x$  へのアフィン変換(平行, 伸長)を次のように行う。

$$x(\xi) = a_0 + a_1 \xi \quad \text{-(A,34)}$$

ここで、Fig.A-3 に示すようにアフィン変換により各要素  $x_i - x_{i+1} (i=0, 1, \dots, n)$  が全て同一区間  $[-1, 1]$  に写像されるとすれば、

$$\begin{aligned}x_i &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \hat{l}_1 \\x_{i+1} &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \hat{l}_2\end{aligned}\tag{A,35}$$

となり、係数は次のように決定される。

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= \frac{x_i \hat{l}_2 - x_{i+1} \hat{l}_1}{\hat{l}_2 - \hat{l}_1} \\ \hat{a}_1 &= \frac{x_{i+1} - x_i}{\hat{l}_2 - \hat{l}_1}\end{aligned}\tag{A,36}$$

この係数によりアフィン変換は次のように書くことが出来る。

$$\begin{aligned}x(\xi) &= \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_1} x_i + \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} x_{i+1} \\ &= N_1(\xi) x_i + N_2(\xi) x_{i+1}\end{aligned}\tag{A,37}$$

一般化すれば 1 次元の形状関数は次のようになる。

$$N_\alpha(\xi) = \frac{1}{2} \left( +\xi_\alpha \xi \right)\tag{A,38}$$

ただし、 $\alpha$  は計算空間での局所節点番号を表し  $\alpha = 1, 2$  である。

写像空間においては変数変換を行うため、Jacobianを使用する必要がある。

2次元におけるJacobianは次のように定義される。

$$J = \frac{(x, y)}{(\hat{l}, \xi)} = \begin{vmatrix} x & y \\ \hat{l} & \xi \end{vmatrix}\tag{A,39}$$

これにより、面積要素(1次元では線要素, 3次元では体積要素)は、

$$dx dy = J d\hat{l} d\xi\tag{A,40}$$

と表される。

またこれにより、次の微分関係式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} = [J]^{-1} \frac{\partial}{\partial \hat{l}}\tag{A,41}$$

ただしここで[J]はJの行列を表し、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \hat{l}} = \frac{\partial}{\partial \xi}\tag{A,42}$$

である。

付録B Black-Scholes方程式解析解の誘導

Black-Scholes方程式には解析解が存在する。本研究ではその解析解を計算結果との比較に用いているので、付録BではBlack-Scholes方程式の解析解を誘導する。

まず、Black-Scholes方程式とその境界条件は次に示すとおりである。

$$\mathcal{L}f = \frac{f}{t} + \frac{1}{2} (\sigma S)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} \quad \text{-(B,1)}$$

$$b.c. \quad f(S_T, T) = \begin{cases} S_T - K & \dots \text{if } S_T \geq K \\ 0 & \dots \text{if } S_T < K \end{cases} \quad \text{-(B,2)}$$

ただしここで、Tは満期日を、STは満期日における原資産の価格を、Kは行使価格をそれぞれ表している。

まず、このBlack-Scholes方程式に次のような変数を導入していく。

$$u = \log \frac{S}{K} + r - \frac{\sigma^2}{2} (T - t) \quad \text{-(B,3)}$$

$$\sigma = T - t \quad \text{-(B,4)}$$

ここで、f(S,t)を新しく導入した変数u, を使って次のように表現する。

$$f(S, t) = \exp(-r\sigma) y(u, \sigma) \quad \text{-(B,5)}$$

ただしここで、y(u, )は未知関数である。

関数f(S,t)をこのように表現することにより、Black-Scholes方程式は次のような簡単な偏微分方程式に書き換えられる。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - \frac{\partial y}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{-(B,6)}$$

このとき境界条件は、

$$b.c. \quad y(u, 0) = \begin{cases} \exp(u) - 1 & \dots \text{if } u \geq 0 \\ 0 & \dots \text{if } u < 0 \end{cases} \quad \text{-(B,7)}$$

に変わる。

次にこの偏微分方程式(B,6)(B,7)を変数分離型を用いて解いていく。

関数y(u, )を次のように表すと、

$$y(u, \sigma) = V(u)W(\sigma) \quad \text{-(B,8)}$$

偏微分方程式(B,6)は次のように表現される。

$$\frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = \frac{2}{\sigma^2} \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial \sigma} \quad \text{-(B,9)}$$

この式(B,9)において左辺はuのみの関数、右辺は  $\sigma$  のみの関数であるから、次のように書くことができる。

$$\frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = \frac{2}{\sigma^2} \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial \sigma} = \ddot{e} \quad \text{-(B,10)}$$

ただし、 $\epsilon$ は $u$ と $\delta$ に無関係な定数である。

したがって、この微分方程式は次の2つの微分方程式に書き換えられます。

$$\frac{d^2 V}{du^2} - \epsilon V = 0 \quad \text{-(B,11)}$$

$$\frac{dW}{d\delta} - \frac{\sigma^2}{2} \epsilon W = 0 \quad \text{-(B,12)}$$

まず、 $\epsilon > 0$ の場合を考える。それぞれの方程式 (B,11)(B,12)は次のように解くことができる。

$$V(u) = C_1 \exp(\sqrt{\epsilon}u) + C_2 \exp(-\sqrt{\epsilon}u) \quad \text{-(B,13)}$$

$$W(\delta) = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} \epsilon \delta\right) \quad \text{-(B,14)}$$

ここで $C_1, C_2$ はそれぞれ積分定数である。

式(B,13)(B,14)から関数 $y(u, \delta)$ は次のようになる。

$$y(u, \delta) = V(u)W(\delta) = (C_1 \exp(\sqrt{\epsilon}u) + C_2 \exp(-\sqrt{\epsilon}u)) \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} \epsilon \delta\right) \quad \text{-(B,15)}$$

しかし、この方程式(B,15)は式(B,7)で示した境界条件を満たさない。

次に、 $\epsilon = 0$ の場合を考える。この場合も同様にして関数 $y(u, \delta)$ を求めると次のようになり、これも境界条件を満たさない。

$$y(u, \delta) = (C_1 + C_2 u) \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} \epsilon \delta\right) \quad \text{-(B,16)}$$

したがって、 $\epsilon < 0$ の場合のみを考えればよいことになる。

そこで、 $\epsilon$ を次のように変換する。

$$\epsilon = -e^2 \quad \text{-(B,17)}$$

ただし、 $e$ も $u$ と $\delta$ に無関係な定数であり、 $(0 < e < \infty)$ である。

改めて、方程式(B,11)(B,12)を解くと、

$$V(u) = C(e) \cos(eu) + D(e) \sin(eu) \quad \text{-(B,18)}$$

$$W(\delta) = C_3 \exp\left(-\frac{\sigma^2 e^2}{2} \delta\right) \quad \text{-(B,19)}$$

となり、関数 $y(u, \delta)$ は次のように求まる。

$$y(u, \delta) = \{C(e) \cos(eu) + D(e) \sin(eu)\} \exp\left(-\frac{\sigma^2 e^2}{2} \delta\right) \quad \text{-(B,20)}$$

$C(\cdot), D(\cdot)$ はそれぞれ $e$ によって決まる積分定数である。

ここで、式(B,20)は方程式(B,6)の解の1つであり、これらの解をすべての  $(0 < u < a)$  について重ね合わせた関数も方程式の解の1つになる。

そこであらためて次のようにおきます。

$$y(u, \tau) = \int_0^a \{C(k) \cos(ku) + D(k) \sin(ku)\} \exp\left[-\frac{\sigma^2 k^2}{2} \tau\right] dk \quad \text{-(B,21)}$$

次にこの解が式(B,7)で与えられる境界条件を満足するように係数  $C(k)$ ,  $D(k)$  を決めていく。

$y(u, 0)$  の式において、 $\tau = 0$  とすると

$$y(u, 0) = \int_0^a \{C(k) \cos(ku) + D(k) \sin(ku)\} dk \quad \text{-(B,22)}$$

となるので、この等式を満たす  $C(k)$ ,  $D(k)$  を決定すればよい。

ここで、 $y(u, 0)$  は  $u$  だけの関数なので簡単のために

$$y(u, 0) = g(a) \quad \text{-(B,23)}$$

$$\text{b.c. } g(a) = \begin{cases} K(\exp(a) - 1) & \dots \text{if } a > 0 \\ 0 & \dots \text{if } a < 0 \end{cases} \quad \text{-(B,24)}$$

とすると、フーリエの積分定理を用いて

$$C(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^a g(a) \cos(ka) da \quad \text{-(B,25)}$$

$$D(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^a g(a) \sin(ka) da \quad \text{-(B,26)}$$

であるから、これを式(B,21)に代入し、

$$y(u, \tau) = \int_0^a \frac{1}{\pi} g(a) \cos k(a-u) da \exp\left[-\frac{\sigma^2 k^2}{2} \tau\right] dk \quad \text{-(B,27)}$$

となる。

式(B,27)の積分を実行し、整理すると次のようになる。

$$y(u, \tau) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\tau}} \int_0^a g(a) \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{a-u}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]^2 da \quad \text{-(B,28)}$$

さらにここで、次のような変数変換を行う。

$$v = \frac{a-u}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{-(B,29)}$$

これにより、境界条件も次のように変わる。

$$b.c. \quad g(a) = \begin{cases} K \left( \exp\left(\mu + \sigma\sqrt{\tau}\nu\right) - 1 \right) \dots \text{if } \nu > \frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ 0 & \dots \text{if } \nu < -\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} \end{cases} \quad \text{-(B,30)}$$

関数 $y(u, \tau)$ は次のように表現され、

$$y(u, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \quad \text{-(B,31)}$$

式(B,30)の境界条件に注目すると、

$$y(u, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{\infty} \left( K \exp\left(\mu + \sigma\sqrt{\tau}\nu\right) - K \right) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \quad \text{-(B,32)}$$

となる。

式(B,32)の積分を行うと、

$$y(u, \tau) = S \exp(r\tau) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} - \sigma\sqrt{\tau}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ - K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \quad \text{-(B,33)}$$

となる。ここで、右辺の積分第1項では式(B,34)、右辺の積分第2項では式(B,35)の変数変換を用いている。

$$z = v - \sigma\sqrt{\tau} \quad \text{-(B,34)}$$

$$z = v \quad \text{-(B,35)}$$

ここで、標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数は

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \quad \text{-(B,36)}$$

で与えられ、 $d$ のとり確率 $N(d)$ は

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \quad \text{-(B,37)}$$

で表される。

標準正規分布のグラフが $z=0$ を中心に対称なことを利用すれば、式(B,33)は次のように書くことができる。

$$y(u, \delta) = S \exp(r\delta) N \frac{u}{\sigma\sqrt{\delta}} + \sigma\sqrt{\delta} - KN \frac{u}{\sigma\sqrt{\delta}} \quad \text{-(B,38)}$$

最後に、式(B,38)を式(B,5)に代入すると

$$f(S, t) = SN \frac{u}{\sigma\sqrt{\delta}} + \sigma\sqrt{\delta} - K \exp(-r\delta) N \frac{u}{\sigma\sqrt{\delta}} \quad \text{-(B,39)}$$

この式が得られる。これがBlack-Scholes方程式の解析解である。

## 付録C プログラムリスト

ここで、計算に用いたプログラムを付しておく。

```

Program for 1D
.....
**
**          FEM 1D MAIN PROGRAM
**          for Black-Scholes Equation
**
**      << MAIN >>
**
**      * Output Data --> 6case
**          ( Maturity : 1month,2months,3months,
**              6months,9months,12months )
**
**      .....
**
**      (Last Up Date : 2001.1.21)
**
**      Copyright 2001 by WISATO Shinnichi.
**      All rights reserved.
**
.....
C
PROGRAM MAIN
C
-----
**      < SET UP >
**
-----
C
PARAMETER (NDMAX=1002001, NEMAX=1000000)
C
DIMENSION XI(2),EJA(NEMAX,2),DJA(NEMAX),RDJA(NEMAX),
*      EM(2,2),AA(2,2),DD(2,2),
*      F(NDMAX),FP(NDMAX),X(NDMAX),II(NDMAX),
*      NB(NEMAX,2),NC1(NDMAX),
*      FM(NDMAX),RFM(NDMAX),NB(2)
C
FAI=3.1415926535897932384620
C
-----
C
WRITE(6,*) '*****'
WRITE(6,*) '**          LOG MESH DATA FILE ALLOC NO. 7  **'
WRITE(6,*) '*****'
READ( 5,*) MALLOC
WRITE(6,*) 'INPUT:',MALLOC
C
WRITE(6,*) '*****'
WRITE(6,*) '**          INITIAL DATA FILE ALLOC NO. 7  **'
WRITE(6,*) '*****'
READ( 5,*) IALLOC
WRITE(6,*) 'INPUT:',IALLOC
C
WRITE(6,*) '*****'
WRITE(6,*) '**          CONDITION DATA FILE ALLOC NO. 7  **'
WRITE(6,*) '*****'
READ( 5,*) MCOND
WRITE(6,*) 'INPUT:',MCOND
C
WRITE(6,*) '*****'
WRITE(6,*) '**          MESH DATA FILE ALLOC NO. 7  **'
WRITE(6,*) '*****'
READ( 5,*) MMALLOC
WRITE(6,*) 'INPUT:',MMALLOC
C
-----
C
READ(MALLOC,*) ND,NE
C
DO ID=1,ND
  READ(MALLOC,*) NNBC,DDX1
  I(ID)=DDX1
ENDDO
C
DO IE=1,NE
  READ(MALLOC,*) NNBC,(NB(I),I=1,2)
  NB(IE,1)=NB(1)
  NB(IE,2)=NB(2)
ENDDO
C

```

```

C      CLOSE(MALLOC)
C-----
C      READ(IALLOC,*) ND,NE
C      DO ID=1,ND
C        READ(IALLOC,*) NNBC,DDF
C        F(ID)=DDF
C      ENDDO
C      CLOSE(IALLOC)
C-----
C      READ(SCOND,*) ND,NE
C      DO ID=1,ND
C        READ(SCOND,*) NNBC,NCI1
C        NCI(ID)=NCI1
C      ENDDO
C      CLOSE(SCOND)
C-----
C      READ(MMALLOC,*) ND,NE
C      DO ID=1,ND
C        READ(MMALLOC,*) NNBC,DDOX1
C        XX(ID)=DDOX1
C      ENDDO
C      CLOSE(MMALLOC)
C-----
C      **          < IN PUT          **
C-----
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          INPUT DT ?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) DT
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',DT
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          INPUT INTEREST [R] ?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) R
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',R
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          INPUT STRIKE PRICE [K] ?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) SP
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',SP
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          INPUT TREND [a] ?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) THU
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',THU
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          INPUT VOLATILITY [s] ?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) SIG
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',SIG
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          OUT PUT FILE NUMBER?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) NOUT
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',NOUT
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          OUT PUT FILE BLANK NUMBER?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) MBLK
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',MBLK
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          DATA INPUT DONE !          **'
C      WRITE(6,*) '**          NOW CALCULATING !!          **'
C      WRITE(6,*) '.....'

```

```

C
-----
** < CALCULATION > **
-----
C
----- (PARAMETER) -----
C
U=0.000
ANTU=0.000
U=-TMU+SIG**2.000/2.000
ANTU=SIG**2.000/2.000
C
----- (SET UP OUTPUT MONTH) -----
C
DMON1=0.000
DMON2=0.000
DMON3=0.000
DMON6=0.000
DMON9=0.000
DMON12=0.000
C
DMON1=1.000/12.000/DT
DMON2=1.000/6.000/DT
DMON3=1.000/4.000/DT
DMON6=1.000/2.000/DT
DMON9=3.000/4.000/DT
DMON12=1.000/DT
C
MONTH1=MINT(DMON1)
MONTH2=MINT(DMON2)
MONTH3=MINT(DMON3)
MONTH6=MINT(DMON6)
MONTH9=MINT(DMON9)
MONTH12=MINT(DMON12)
C
----- (LOCAL POINT VALUE) -----
C
XI(1)=-1.000
XI(2)=1.000
C
----- (MATRIX BASE) -----
C
DO I=1,2
DO J=1,2
C
EMMN=0.000
AAAA=0.000
DDDD=0.000
C
EMMN=(1.000+XI(I)*XI(J)/3.000)/2.000
AAAA=XI(I)/2.000
DDDD=XI(I)*XI(J)/2.000
C
EM(I,J)=EMMN
AA(I,J)=AAAA
DD(I,J)=DDDD
C
EMDDO
EMDDO
C
----- (JACOBIAN) -----
C
DO ID=1,ND
FM(ID)=0.000
RFM(ID)=0.000
EMDDO
C
DO IE=1,NE
C
I1=NR(IE,1)
I2=NR(IE,2)
C
SE=0.000
DJ=0.000
DDJ=0.000
C
SE=X(I2)-X(I1)
C
DJ=SE/0.500
DDJ=1.000/DJ
C
DJA(IE)=DJ
DDJA(IE)=DDJ
C
FM(I1)=FM(I1)+DJ

```

```

      FM(I2)=FM(I2)+DJ
C
      ENDDO
C
      DO ID=1,ND
      RFM(ID)=1.000/FM(ID)
      ENDDO
C
C------(ITERATION)-----
C
      N=0
      TIME=0.000
      NCUT=NGOUT
C
      200 CONTINUE
C
C------(MAIN CALCULATION)-----
C
      DO ID=1,ND
      FF(ID)=0.000
      ENDDO
C
      DO IE=1,NE
      DO I=1,2
C
          J1=NB(IE,I)
          I1=NB(IE,1)
          I2=NB(IE,2)
C
          EMS=0.000
          AAA=0.000
          DSD=0.000
C
          EMS=(EM(I,1)*F(I1)+EM(I,2)*F(I2))+DJA(IE)
C
          AAA=AA(I,1)*F(I1)+AA(I,2)*F(I2)
C
          DSD=(DD(I,1)*F(I1)+DD(I,2)*F(I2))+RDJA(IE)
C
          FF(J1)=FF(J1)-N*EMS-U*AAA-ANYU+DSD
C
      ENDDO
      ENDDO
C
C------(ADVANCE TIME)-----
C
      N=N+1
      TIME=TIME+DT
C
C------(BOUNDARY CONDITION)-----
C
      DO ID=1,ND
      ICI=NCI(ID)
      IF (ICI.EQ.0) THEN
          F(ID)=F(ID)+FF(ID)+DT*RFM(ID)
C
      ELSE
          FD=0.000
          SD=0.000
          DFD=0.000
          DSD=0.000
          FN=0.000
          SN=0.000
C
          FD=(X(ID)+(R-SIG**2.000+0.500)*TIME)/SIG/SQRT(TIME)
          +SIG/SQRT(TIME)
          DFD=(ABS(FD)+10.000)/50.000
          DO I=1,51
              DDFD=0.000
              DFN=0.000
              DDFD=-10.000+DFD*(I-1)
              DFN=(EXP(-DDFD**2.000+0.500)/SQRT(2.000*PAI))+DFD/3.000
              IF (I.EQ.1) THEN
                  DFN=DFN
              ELSEIF (I.EQ.51) THEN
                  DFN=DFN
              ELSEIF (MOD(I,2).EQ.0) THEN
                  DFN=DFN+4.000
              ELSE
                  DFN=DFN+2.000
              ENDF
              FN=FN+DFN
          ENDDO
          IF (FD.LT.0) THEN
              FN=1.000-FN
          
```

```

C      ENDIF
C      SD=(I(ID)+(R-SIG**2.000+0.500)*TIME)/SIG/SQRT(TIME)
C      DSD=(ABS(SD)+10.000)/50.000
C      DO I=1,51
C          DSD=0.000
C          DSN=0.000
C          DSD=-10.000+DSD*(I-1)
C          DSN=(EXP(-DSD**2.000+0.500)/SQRT(2.000*PI))*DSD/3.000
C          IF (I.EQ.1) THEN
C              DSN=DSN
C          ELSEIF (I.EQ.51) THEN
C              DSN=DSN
C          ELSEIF (MOD(I,2).EQ.0) THEN
C              DSN=DSN+4.000
C          ELSE
C              DSN=DSN+2.000
C          ENDIF
C          SN=SN+DSN
C      ENDDO
C      IF (SD.LT.0) THEN
C          SN=1.000-SN
C      ENDIF
C      F(ID)=XI(ID)+FN-SP*EXP(-R*TIME)+SN
C      ENDIF
C      ENDDO
C
C      -----
C      **          < GET PUT >          **
C      -----
C
C      IF (N.EQ.MONTH1) THEN
C          WRITE(MOUT,*) ND,NE
C          DO ID=1,ND
C              WRITE(MOUT,300) ID,XI(ID),F(ID)
C          ENDDO
C          WRITE(MOUT,*) ' '
C          WRITE(MOUT,*) '1 MONTH'
C          WRITE(MOUT,*) 'TIME=',TIME
C          WRITE(MOUT,*) '[PARAMETER]'
C          WRITE(MOUT,400) DT,R,TMU,SIG
C          WRITE(MOUT,500) U,ANYU
C          MOUT=MOUT+MBLK
C          WRITE(G,*) ' '
C          WRITE(G,*)'--- 8% DONE! -----'
C      ENDIF
C
C      IF (N.EQ.MONTH2) THEN
C          WRITE(MOUT,*) ND,NE
C          DO ID=1,ND
C              WRITE(MOUT,300) ID,XI(ID),F(ID)
C          ENDDO
C          WRITE(MOUT,*) ' '
C          WRITE(MOUT,*) '2 MONTH'
C          WRITE(MOUT,*) 'TIME=',TIME
C          WRITE(MOUT,*) '[PARAMETER]'
C          WRITE(MOUT,400) DT,R,TMU,SIG
C          WRITE(MOUT,500) U,ANYU
C          MOUT=MOUT+MBLK
C          WRITE(G,*) ' '
C          WRITE(G,*)'----- 17% DONE! -----'
C      ENDIF
C
C      IF (N.EQ.MONTH3) THEN
C          WRITE(MOUT,*) ND,NE
C          DO ID=1,ND
C              WRITE(MOUT,300) ID,XI(ID),F(ID)
C          ENDDO
C          WRITE(MOUT,*) ' '
C          WRITE(MOUT,*) '3 MONTH'
C          WRITE(MOUT,*) 'TIME=',TIME
C          WRITE(MOUT,*) '[PARAMETER]'
C          WRITE(MOUT,400) DT,R,TMU,SIG
C          WRITE(MOUT,500) U,ANYU
C          MOUT=MOUT+MBLK
C          WRITE(G,*) ' '
C          WRITE(G,*)'----- 25% DONE! -----'
C      ENDIF
C
C      IF (N.EQ.MONTH6) THEN
C          WRITE(MOUT,*) ND,NE
C          DO ID=1,ND
C              WRITE(MOUT,300) ID,XI(ID),F(ID)

```



Program for 2D

```
*****
**
**          FEM 2D MAIN PROGRAM
**          for Black-Scholes Equation
**
**      << MAIN >>
**
**      * Output Data ---> Scase
**          ( Maturity : 1month,2months,3months,
**              6months,9months,12months )
**
*****
**
**      (Last Up Date : 2001.1.21)
**
**
**      Copyright 2001 by MISATO Shinichi.
**      All rights reserved.
**
*****
C
C      PROGRAM MAIN
C
C      < SET UP >
C
C      PARAMETER (NDMAX=1002001,NEMAX=1000000)
C
C      DIMENSION II(4),ETA(4),EJA(NEMAX,4),DJA(NEMAX),NDJA(NEMAX),
*      IA(4,4),AH(4,4),
*      DA(4,4),DB(4,4),DC(4,4),DD(4,4),DE(4,4),
*      EM(4,4),AM1(4,4),AM2(4,4),
*      DM11(4,4),DM22(4,4),DM12(4,4),
*      F(NEMAX),FF(NEMAX),
*      I1(NEMAX),I2(NEMAX),IX1(NEMAX),IX2(NEMAX),
*      NB(NEMAX,4),MC1(NEMAX),
*      FM(NEMAX),RFM(NEMAX),MB(4)
C
C      PAI=3.1415926535897932384626
C
C-----
C
C      WRITE(6,*) '*****'
C      WRITE(6,*) '**          LOG MESH DATA FILE ALLOC NO. ? **'
C      WRITE(6,*) '*****'
C      READ( 5,*) MALLDC
C      WRITE(6,*) 'INPUT: ',MALLOC
C
C      WRITE(6,*) '*****'
C      WRITE(6,*) '**          INITIAL DATA FILE ALLOC NO. ? **'
C      WRITE(6,*) '*****'
C      READ( 5,*) IALLDC
C      WRITE(6,*) 'INPUT: ',IALLOC
C
C      WRITE(6,*) '*****'
C      WRITE(6,*) '**          CONDITION DATA FILE ALLOC NO. ? **'
C      WRITE(6,*) '*****'
C      READ( 5,*) NCOND
C      WRITE(6,*) 'INPUT: ',NCOND
C
C      WRITE(6,*) '*****'
C      WRITE(6,*) '**          MESH DATA FILE ALLOC NO. ? **'
C      WRITE(6,*) '*****'
C      READ( 5,*) MMALLDC
C      WRITE(6,*) 'INPUT: ',MMALLOC
C
C-----
C
C      READ(MALLDC,*) ND,NE
C
C      DO ID=1,ND
C          READ(MALLOC,*) NWDC,DOX1,DOX2
C          I1(ID)=DOX1
C          I2(ID)=DOX2
C      ENDDO
C
C      DO IE=1,NE
C          READ(MALLOC,*) NWDC,(MB(I),I=1,4)
C          MB(IE,1)=MB(1)
C          MB(IE,2)=MB(2)
C          MB(IE,3)=MB(3)
C          MB(IE,4)=MB(4)

```

```

C      ENDDO
C      CLOSE(MALLOC)
C-----
C      READ(IALLOC,*) ND,NE
C      DO ID=1,ND
C        READ(IALLOC,*) NNBC,DDF
C        F(ID)=DDF
C      ENDDO
C      CLOSE(IALLOC)
C-----
C      READ(MCOND,*) ND,NE
C      DO ID=1,ND
C        READ(MCOND,*) NNBC,NCX1
C        NCI(ID)=NCX1
C      ENDDO
C      CLOSE(MCOND)
C-----
C      READ(MMALLOC,*) ND,NE
C      DO ID=1,ND
C        READ(MMALLOC,*) NNBC,DDDI1,DDDI2
C        IX1(ID)=DDDI1
C        IX2(ID)=DDDI2
C      ENDDO
C      CLOSE(MMALLOC)
C-----
C      < IN PUT >
C-----
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          INPUT DT ?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) DT
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',DT
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          INPUT INTEREST [R] ?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) R
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',R
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          INPUT STRIKE PRICE 1 [K1] ?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) SP1
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',SP1
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          INPUT TREND 1 [mu 1] ?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) TMU1
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',TMU1
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          INPUT VOLATILITY 1 [sigma 1] ?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) SIG1
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',SIG1
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          INPUT STRIKE PRICE 2 [K2] ?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) SP2
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',SP2
C
C      WRITE(6,*) '.....'
C      WRITE(6,*) '**          INPUT TREND 2 [mu 2] ?          **'
C      WRITE(6,*) '.....'
C      READ( 5,*) TMU2
C      WRITE(6,*) 'INPUT:',TMU2
C
C      WRITE(6,*) '.....'

```

```

WRITE(6,*) '**          INPUT VOLATILITY 2 [sigma 2] ?          **'
WRITE(6,*) '.....'
READ( 5,*) SIG2
WRITE(6,*) 'INPUT:',SIG2
C
WRITE(6,*) '.....'
WRITE(6,*) '**          INPUT CORRELATION COEFFICIENT [rho] ?          **'
WRITE(6,*) '.....'
READ( 5,*) P12
WRITE(6,*) 'INPUT:',P12
C
WRITE(6,*) '.....'
WRITE(6,*) '**          OUT PUT FILE NUMBER?          **'
WRITE(6,*) '.....'
READ( 5,*) NOUT
WRITE(6,*) 'INPUT:',NOUT
C
WRITE(6,*) '.....'
WRITE(6,*) '**          OUT PUT FILE BLANK NUMBER?          **'
WRITE(6,*) '.....'
READ( 5,*) MBLK
WRITE(6,*) 'INPUT:',MBLK
C
WRITE(6,*) '.....'
WRITE(6,*) '**          DATA INPUT DONE !          **'
WRITE(6,*) '**          NOW CALCULATING !!          **'
WRITE(6,*) '.....'
C
*****
**          < CALCULATION >          **
*****
C
C------(PARAMETER)-----
C
U1=0.000
U2=0.000
ANTU11=0.000
ANTU22=0.000
ANTU12=0.000
C
U1=-TMU1+SIG1**2.000/2.000
U2=-TMU2+SIG2**2.000/2.000
ANTU11=SIG1**2.000/2.000
ANTU22=SIG2**2.000/2.000
ANTU12=SIG1*SIG2*P12
C
C------(SET UP OUTPUT MONTH)-----
C
DMON1=0.000
DMON2=0.000
DMON3=0.000
DMON6=0.000
DMON9=0.000
DMON12=0.000
C
DMON1=1.000/12.000/DT
DMON2=1.000/6.000/DT
DMON3=1.000/4.000/DT
DMON6=1.000/2.000/DT
DMON9=3.000/4.000/DT
DMON12=1.000/DT
C
MONTH1=NINT(DMON1)
MONTH2=NINT(DMON2)
MONTH3=NINT(DMON3)
MONTH6=NINT(DMON6)
MONTH9=NINT(DMON9)
MONTH12=NINT(DMON12)
C
C------(LOCAL POINT VALUE)-----
C
XI(1)=-1.000
XI(2)=1.000
XI(3)=1.000
XI(4)=-1.000
ETA(1)=-1.000
ETA(2)=-1.000
ETA(3)=1.000
ETA(4)=1.000
C
C------(MATRIX BASE)-----
C
DO I=1,4
DO J=1,4
C

```

```

C      EDDO=0.000
C
C      AAAA=0.000
C      AAAB=0.000
C
C      DDDA=0.000
C      DDDC=0.000
C      DDDC=0.000
C      DDDC=0.000
C      DDDC=0.000
C
C      EDDO=(1.000+XI(I)+XI(J)/3.000)
C      * (1.000+ETA(I)+ETA(J)/3.000)/4.000
C
C      AAAA=XI(J)+(3.000+ETA(I)+ETA(J))/12.000
C      AAAB=ETA(J)+(3.000+XI(I)+XI(J))/12.000
C
C      DDDA=XI(I)+XI(J)+(3.000+ETA(I)+ETA(J))/12.000
C      DDDC=ETA(I)+ETA(J)+(3.000+XI(I)+XI(J))/12.000
C      DDDC=(XI(I)+ETA(J)+ETA(I)+XI(J))/4.000
C      DDDC=XI(I)+ETA(J)/4.000
C      DDDC=ETA(I)+XI(J)/4.000
C
C      EM(I,J)=EMM
C
C      AA(I,J)=AAA
C      AB(I,J)=AAB
C
C      DA(I,J)=DDA
C      DB(I,J)=DDC
C      DC(I,J)=DDC
C      DD(I,J)=DDC
C      DE(I,J)=DDE
C
C      ENDDO
C      ENDDO
C
C      ----- (JACOBIAN) -----
C
C      DO ID=1,ND
C      FM(ID)=0.000
C      NFM(ID)=0.000
C      ENDDO
C
C      DO IE=1,NE
C
C      I1=NB(IE,1)
C      I2=NB(IE,2)
C      I3=NB(IE,3)
C      I4=NB(IE,4)
C
C      EJ1=0.000
C      EJ2=0.000
C      EJ3=0.000
C      EJ4=0.000
C
C      SE=0.000
C      DJ=0.000
C      DDJ=0.000
C
C      EJ1=(X1(I2)-X1(I1)+X1(I3)-X1(I4))/4.000
C      EJ2=(X2(I2)-X2(I1)+X2(I3)-X2(I4))/4.000
C      EJ3=(X1(I4)-X1(I1)+X1(I3)-X1(I2))/4.000
C      EJ4=(X2(I4)-X2(I1)+X2(I3)-X2(I2))/4.000
C
C      EJA(IE,1)=EJ1
C      EJA(IE,2)=EJ2
C      EJA(IE,3)=EJ3
C      EJA(IE,4)=EJ4
C
C      SE=(X1(I2)-X1(I1))+(X2(I4)-X2(I1))/2.000
C      * (X1(I3)-X1(I4))+(X2(I3)-X2(I2))/2.000
C
C      DJ=SE*0.2500
C      DDJ=1.000/DJ
C
C      DJA(IE)=DJ
C      DDJA(IE)=DDJ
C
C      FM(I1)=FM(I1)+DJ
C      FM(I2)=FM(I2)+DJ
C      FM(I3)=FM(I3)+DJ
C      FM(I4)=FM(I4)+DJ
C
C      ENDDO

```

```

C      DO ID=1,ND
      RFW(ID)=1.000/FW(ID)
      ENDDO
C----- (ITERATION) -----
C
      N=0
      TIME=0.000
      MOUT=MOUT
C
200 CONTINUE
C----- (MATRIX ELEMENT) -----
C
      DO ID=1,ND
      FF(ID)=0.000
      ENDDO
C
      DO IE=1,NE
C
      DO I=1,4
      DO J=1,4
      AM1(I,J)=0.000
      AM2(I,J)=0.000
      DM11(I,J)=0.000
      DM22(I,J)=0.000
      DM12(I,J)=0.000
      ENDDO
      ENDDO
C
      DO I=1,4
      DO J=1,4
C
      AA1=0.000
      AA2=0.000
      DD11=0.000
      DD22=0.000
      DD12=0.000
C
      AA1=EJA(IE,4)*AA(I,J)-EJA(IE,2)*AB(I,J)
      AM1(I,J)=AA1
C
      AA2=EJA(IE,3)*AA(I,J)+EJA(IE,1)*AB(I,J)
      AM2(I,J)=AA2
C
      DD11=(EJA(IE,4)+EJA(IE,4))*DA(I,J)
      *EJA(IE,2)+EJA(IE,2)*DB(I,J)
      *EJA(IE,2)+EJA(IE,4)*DC(I,J)+RDJA(IE)
      DM11(I,J)=DD11
C
      DD22=(EJA(IE,3)+EJA(IE,3))*DA(I,J)
      *EJA(IE,1)+EJA(IE,1)*DB(I,J)
      *EJA(IE,1)+EJA(IE,3)*DC(I,J)+RDJA(IE)
      DM22(I,J)=DD22
C
      DD12=(-EJA(IE,3)+EJA(IE,4))*DA(I,J)
      *EJA(IE,1)+EJA(IE,2)*DB(I,J)
      *EJA(IE,1)+EJA(IE,4)*DC(I,J)
      *EJA(IE,2)+EJA(IE,3)*DC(I,J)+RDJA(IE)
      DM12(I,J)=DD12
C
      ENDDO
      ENDDO
C----- (MAIN CALCULATION) -----
C
      DO I=1,4
C
      J1=NB(IE,I)
      I1=NB(IE,1)
      I2=NB(IE,2)
      I3=NB(IE,3)
      I4=NB(IE,4)
C
      EMN=0.000
      AAA1=0.000
      AAA2=0.000
      DDD11=0.000
      DDD22=0.000
      DDD12=0.000
C
      * EMN=(EM(I,1)+F(I1)+EM(I,2)+F(I2)
      *EM(I,3)+F(I3)+EM(I,4)+F(I4))+DJA(IE)
C

```

```

C
DO ID=1,ND
  RFM(ID)=1.000/FM(ID)
ENDDO

C----- (ITERATION) -----
C
N=0
TIME=0.000
MOUT=NDOUT
C
200 CONTINUE
C----- (MATRIX ELEMENT) -----
C
DO ID=1,ND
  FF(ID)=0.000
ENDDO
C
DO IE=1,NE
C
DO I=1,4
  DO J=1,4
    AM1(I,J)=0.000
    AM2(I,J)=0.000
    DM11(I,J)=0.000
    DM22(I,J)=0.000
    DM12(I,J)=0.000
  ENDDO
ENDDO
C
DO I=1,4
  DO J=1,4
C
AA1=0.000
AA2=0.000
DD11=0.000
DD22=0.000
DD12=0.000
C
AA1=EJA(IE,4)*AA(I,J)-EJA(IE,2)*AB(I,J)
AM1(I,J)=AA1
C
AA2=EJA(IE,3)*AA(I,J)+EJA(IE,1)*AB(I,J)
AM2(I,J)=AA2
C
DD11=(EJA(IE,4)+EJA(IE,4))*DA(I,J)
+ EJA(IE,2)+EJA(IE,2))*DB(I,J)
- EJA(IE,2)+EJA(IE,4))*DC(I,J))*RDJA(IE)
DM11(I,J)=DD11
C
DD22=(EJA(IE,3)+EJA(IE,3))*DA(I,J)
+ EJA(IE,1)+EJA(IE,1))*DB(I,J)
- EJA(IE,1)+EJA(IE,3))*DC(I,J))*RDJA(IE)
DM22(I,J)=DD22
C
DD12=(-EJA(IE,3)+EJA(IE,4))*DA(I,J)
- EJA(IE,1)+EJA(IE,2))*DB(I,J)
+ EJA(IE,1)+EJA(IE,4))*DB(I,J)
+ EJA(IE,2)+EJA(IE,3))*DB(I,J))*RDJA(IE)
DM12(I,J)=DD12
C
ENDDO
ENDDO
C----- (MAIN CALCULATION) -----
C
DO I=1,4
C
J1=NB(IE,1)
I1=NB(IE,1)
I2=NB(IE,2)
I3=NB(IE,3)
I4=NB(IE,4)
C
EMM=0.000
AAA1=0.000
AAA2=0.000
DDD11=0.000
DDD22=0.000
DDD12=0.000
C
EMM=(EM(I,1)+F(I1)+EM(I,2)+F(I2)
+ EM(I,3)+F(I3)+EM(I,4)+F(I4))+DJJA(IE)
C

```

```

      AAA1=AM1(I,1)*F(I1)+AM1(I,2)*F(I2)
      +AM1(I,3)*F(I3)+AM1(I,4)*F(I4)
C
      AAA2=AM2(I,1)*F(I1)+AM2(I,2)*F(I2)
      +AM2(I,3)*F(I3)+AM2(I,4)*F(I4)
C
      DDD11=DM11(I,1)*F(I1)+DM11(I,2)*F(I2)
      +DM11(I,3)*F(I3)+DM11(I,4)*F(I4)
C
      DDD22=DM22(I,1)*F(I1)+DM22(I,2)*F(I2)
      +DM22(I,3)*F(I3)+DM22(I,4)*F(I4)
C
      DDD12=DM12(I,1)*F(I1)+DM12(I,2)*F(I2)
      +DM12(I,3)*F(I3)+DM12(I,4)*F(I4)
C
      FF(J1)=FF(J1)-R*EMM-U1*AAA1-U2*AAA2-ANYU11*DDD11
      -ANYU22*DDD22-ANYU12*DDD12
C
      ENDDO
      ENDDO
C
      -----(ADVANCE TIME)-----
C
      N=N+1
      TIME=TIME+DT
C
      -----(BOUNDARY CONDITION)-----
C
      DO ID=1,ND
      ICI=NCI(ID)
      IF (ICI.EQ.0) THEN
        F(ID)=F(ID)+FF(ID)*DT*RFM(ID)
C
      ELSE
        FD1=0.000
        FD2=0.000
        SD1=0.000
        SD2=0.000
        DFD1=0.000
        DFD2=0.000
        DSD1=0.000
        DSD2=0.000
        FNI=0.000
        FN2=0.000
        SNI=0.000
        SN2=0.000
C
        FD1=(X1(ID)+(R-SIG1**2.000+0.500)*TIME)/SIG1/SQRT(TIME)
        +SIG1/SQRT(TIME)
        DFD1=(ABS(FD1)+10.000)/50.000
        DO I=1,51
          DDFD1=0.000
          DFN1=0.000
          DDFD1=-10.000+DFD1*(I-1)
          DFN1=(EXP(-DDFD1**2.000+0.500)/SQRT(2.000*PAI))*DFD1/3.000
          IF (I.EQ.1) THEN
            DFN1=DFN1
          ELSEIF (I.EQ.51) THEN
            DFN1=DFN1
          ELSEIF (MOD(I,2).EQ.0) THEN
            DFN1=DFN1+4.000
          ELSE
            DFN1=DFN1+2.000
          ENDIF
          FNI=FNI+DFN1
        ENDDO
        IF (FD1.LT.0) THEN
          FNI=1.000-FNI
        ENDIF
C
        FD2=(X2(ID)+(R-SIG2**2.000+0.500)*TIME)/SIG2/SQRT(TIME)
        +SIG2/SQRT(TIME)
        DFD2=(ABS(FD2)+10.000)/50.000
        DO I=1,51
          DDFD2=0.000
          DFN2=0.000
          DDFD2=-10.000+DFD2*(I-1)
          DFN2=(EXP(-DDFD2**2.000+0.500)/SQRT(2.000*PAI))*DFD2/3.000
          IF (I.EQ.1) THEN
            DFN2=DFN2
          ELSEIF (I.EQ.51) THEN
            DFN2=DFN2
          ELSEIF (MOD(I,2).EQ.0) THEN
            DFN2=DFN2+4.000
          ELSE
            DFN2=DFN2+2.000
          ENDIF
          FN2=FN2+DFN2
        ENDDO
        IF (FD2.LT.0) THEN
          FN2=1.000-FN2
        ENDIF
      ENDIF
      ENDIF
    
```

```

      DFN2=DFN2*2.000
    ENDDIF
    FN2=FN2+DFN2
  ENDDO
  IF (FD2.LT.0) THEN
    FN2=1.000-FN2
  ENDDIF
C
SD1=(I1(ID)+(R-SIG1**2.000+0.500)*TIME)/SIG1/SQRT(TIME)
DSD1=(ABS(SD1)+10.000)/50.000
DO I=1,51
  DSD1=0.000
  DSN1=0.000
  DSD1=-10.000+DSD1*(I-1)
  DSN1=(EXP(-DSD1**2.000+0.500)/SQRT(2.000*PI))+DSD1/3.000
  IF (I.EQ.1) THEN
    DSN1=DSN1
  ELSEIF (I.EQ.51) THEN
    DSN1=DSN1
  ELSEIF (MOD(I,2).EQ.0) THEN
    DSN1=DSN1+4.000
  ELSE
    DSN1=DSN1*2.000
  ENDDIF
  SN1=SN1+DSN1
ENDDO
IF (SD1.LT.0) THEN
  SN1=1.000-SN1
ENDDIF
C
SD2=(I2(ID)+(R-SIG2**2.000+0.500)*TIME)/SIG2/SQRT(TIME)
DSD2=(ABS(SD2)+10.000)/50.000
DO I=1,51
  DSD2=0.000
  DSN2=0.000
  DSD2=-10.000+DSD2*(I-1)
  DSN2=(EXP(-DSD2**2.000+0.500)/SQRT(2.000*PI))+DSD2/3.000
  IF (I.EQ.1) THEN
    DSN2=DSN2
  ELSEIF (I.EQ.51) THEN
    DSN2=DSN2
  ELSEIF (MOD(I,2).EQ.0) THEN
    DSN2=DSN2+4.000
  ELSE
    DSN2=DSN2*2.000
  ENDDIF
  SN2=SN2+DSN2
ENDDO
IF (SD2.LT.0) THEN
  SN2=1.000-SN2
ENDDIF
C
F(ID)=X11(ID)*FN1-SP1*EXP(-R*TIME)+SN1
      * X12(ID)*FN2-SP2*EXP(-R*TIME)+SN2
C
  ENDDIF
  ENDDO
C
*****
**                               < OUT PUT >                               **
*****
C
IF (N.EQ.MONTH1) THEN
  WRITE(MOUT,*) ND,NE
  DO ID=1,ND
    WRITE(MOUT,300) ID,F(ID)
  ENDDO
  WRITE(MOUT,*) ' '
  WRITE(MOUT,*) '1 MONTH'
  WRITE(MOUT,*) 'TIME=',TIME
  WRITE(MOUT,*) '[PARAMETER]'
  WRITE(MOUT,400) DT,R,TMU1,SIG1,TMU2,SIG2,P12
  WRITE(MOUT,500) U1,U2,ANYU11,ANYU22,ANYU12
  MOUT=MOUT+MBLK
  WRITE(6,*)' '
  WRITE(6,*)'--- 8% DONE! -----'
ENDDIF
C
IF (N.EQ.MONTH2) THEN
  WRITE(MOUT,*) ND,NE
  DO ID=1,ND
    WRITE(MOUT,300) ID,F(ID)
  ENDDO
  WRITE(MOUT,*) ' '
  WRITE(MOUT,*) '2 MONTHS'

```

```

WRITE(MOUT,*) 'TIME=',TIME
WRITE(MOUT,*) '[PARAMETER]'
WRITE(MOUT,400) DT,R,TMU1,SIG1,TMU2,SIG2,P12
WRITE(MOUT,500) U1,U2,ANYU11,ANYU22,ANYU12
MOUT=MOUT+MBLK
WRITE(6,*) ' '
WRITE(6,*)'----- 17% DONE! -----'
ENDIF
C
IF (N.EQ.MONTH3) THEN
WRITE(MOUT,*) ND,NE
DO ID=1,ND
WRITE(MOUT,300) ID,F(ID)
ENDDO
WRITE(MOUT,*) ' '
WRITE(MOUT,*) '3 MONTH'
WRITE(MOUT,*) 'TIME=',TIME
WRITE(MOUT,*) '[PARAMETER]'
WRITE(MOUT,400) DT,R,TMU1,SIG1,TMU2,SIG2,P12
WRITE(MOUT,500) U1,U2,ANYU11,ANYU22,ANYU12
MOUT=MOUT+MBLK
WRITE(6,*) ' '
WRITE(6,*)'----- 25% DONE! -----'
ENDIF
C
IF (N.EQ.MONTH6) THEN
WRITE(MOUT,*) ND,NE
DO ID=1,ND
WRITE(MOUT,300) ID,F(ID)
ENDDO
WRITE(MOUT,*) ' '
WRITE(MOUT,*) '6 MONTH'
WRITE(MOUT,*) 'TIME=',TIME
WRITE(MOUT,*) '[PARAMETER]'
WRITE(MOUT,400) DT,R,TMU1,SIG1,TMU2,SIG2,P12
WRITE(MOUT,500) U1,U2,ANYU11,ANYU22,ANYU12
MOUT=MOUT+MBLK
WRITE(6,*) ' '
WRITE(6,*)'----- 50% DONE! -----'
ENDIF
C
IF (N.EQ.MONTH9) THEN
WRITE(MOUT,*) ND,NE
DO ID=1,ND
WRITE(MOUT,300) ID,F(ID)
ENDDO
WRITE(MOUT,*) ' '
WRITE(MOUT,*) '9 MONTH'
WRITE(MOUT,*) 'TIME=',TIME
WRITE(MOUT,*) '[PARAMETER]'
WRITE(MOUT,400) DT,R,TMU1,SIG1,TMU2,SIG2,P12
WRITE(MOUT,500) U1,U2,ANYU11,ANYU22,ANYU12
MOUT=MOUT+MBLK
WRITE(6,*) ' '
WRITE(6,*)'----- 75% DONE! -----'
ENDIF
C
IF (N.EQ.MONTH12) THEN
WRITE(MOUT,*) ND,NE
DO ID=1,ND
WRITE(MOUT,300) ID,F(ID)
ENDDO
WRITE(MOUT,*) ' '
WRITE(MOUT,*) '12 MONTH'
WRITE(MOUT,*) 'TIME=',TIME
WRITE(MOUT,*) '[PARAMETER]'
WRITE(MOUT,400) DT,R,TMU1,SIG1,TMU2,SIG2,P12
WRITE(MOUT,500) U1,U2,ANYU11,ANYU22,ANYU12
MOUT=MOUT+MBLK
ENDIF
C
IF (N.LT.MONTH12) THEN
GO TO 200
ENDIF
C
300 FORMAT(I8,E25.10)
C
400 FORMAT(' DT=',E15.8,' R=',F6.3,'  $\mu$  1=',F6.3,'  $\sigma$  1=',F6.3,
& '  $\mu$  2=',F6.3,'  $\sigma$  2=',F6.3,' P12=',F6.3)
C
500 FORMAT(' U1=',F6.3,' U2=',F6.3,'  $\nu$  11=',F6.3,
& '  $\nu$  22=',F6.3,'  $\nu$  12=',F6.3)
C
WRITE(6,*) ' '
WRITE(6,*)'----- 100% DONE! -----'

```

```
WRITE(6,*) ' +  
WRITE(6,*) '-----+  
WRITE(6,*) '***          CALCULATION IS COMPLETED          ***  
WRITE(6,*) '-----+  
C  
STOP  
END
```