

天候デリバティブによる電力会社のリスク管理¹

大 橋 和 彦²
金 村 宗³

要旨

- 1．イントロダクション
- 2．モデル
- 3．天候デリバティブ価格の実証研究
- 4．電力会社のリスクヘッジと天候デリバティブの設計
- 5．結論と今後の課題

要旨

本論文では、気温インデックスを原資産とする天候デリバティブを用いた電力会社のリスクヘッジについて検討する。まず、天候デリバティブのプライシングでしばしば問題となる市場の不完備性に対処する一手法として、Cochrane and Saa-Requejo (2000)のグッドディールバウンズに基づいた天候デリバティブのプライシング手法を提示する。続いて、電力を市場から調達し、固定価格で消費者へ販売する電力会社に関して、コストとなる電力価格と電力量の積の増加リスクをヘッジするための天候デリバティブの利用について検討する。そして、リスクヘッジのための天候デリバティブを設計する上で、電力市場の需給関係 - 特に供給曲線の形状 - が重要な役割を果たすことを示す。

キーワード：天候デリバティブ、電力自由化、電力価格、電力需要、リスクヘッジ

JEL 分類： G13、L94、Q41

¹ 本稿の作成にあたっては、日本商品先物振興協会より「商品先物取引に係る研究調査助成金制度」に基づく助成金を頂いた。また、上村昌司、マテオ・マネラ、三浦良造、長山いづみ、中野誠、野間幹晴、そして特に研究メンバーの本多俊毅および中村信弘の各氏から大変有益なコメントを頂いた。この場で改めて謝意を表したい。なお、本論文の内容・意見は筆者個人に属し、必ずしも J-POWER 電源開発株式会社の公式見解を示すものではない。

² 一橋大学大学院国際企業戦略研究科(ICS)助教授

³ J-POWER 電源開発株式会社

1. イントロダクション

本論文の目的は、気温インデックスを原資産とする天候デリバティブの価格付け手法を提示するとともに、電力自由化後の電力会社の収益リスクに対し、天候デリバティブを活用したリスク管理について論ずることである。

天候変動によって多くの企業は収益の変動リスクを抱えている。⁴その中で特に、天候から甚大なる影響を受ける企業の一つが電力会社で、気温は電力需要量を左右する主要なリスクである。具体的に、気温と需要量の相関関係を観察すると、真夏日のように気温が平年値を上回る場合、過度なエアコン使用によって需要量は激増するが、逆に冷夏では需要量は例年の数値以下となる。加えて、電力自由化後の世界では、気温が価格に強いインパクトを与えている。実際に例えば、米国の電力市場の気温と市場価格の関係を観察すると、気温が市場全体の需要量に影響し、市場の供給曲線を介して価格を決定づけている。従って、自由化後の電力市場では、電力需要量といったボリュームリスクに加え、電力売買に伴う価格リスクが存在し、両者の背後には気温リスクが内在している。このような天候リスクのヘッジ手法として、近年多くの企業が天候に関する金融派生商品(天候デリバティブ)を活用するようになった。そこで、電力会社が自ら収益リスクをヘッジする一つの方法として天候デリバティブが導入される。

ところが、天候デリバティブは歴史が浅く、価格付け手法が確立されていない。難しさの原因は、天候リスクが市場で取引されておらず、不完備市場での価格付けを行わなければならない点にある。すなわち、株式市場のデリバティブであれば無裁定のもとで価格付けできるが、不完備性を持つ天候デリバティブの場合、市場で一意的な無裁定価格を正確に捉えることができない。従って、無裁定条件だけでは天候デリバティブ価格は求められないのである。

不完備性を持つ天候デリバティブの価格付け手法の一つとして、効用関数と最適消費点で確率的割引ファクター(Stochastic Discount Factor: SDF)を特徴付ける消費資産価格モデル(例えば Cochrane(2001)参照)が適用されてきた。Cao and Wei(2000)の均衡モデルはその一例で、代表的経済主体の仮定の下、気温を経済の主要な不確実性の一部と捉えて Lucas(1978)を適用し、べき型効用関数と均衡点での気温に依存した総配当から求まる最適消費点を用いることで、天候デリバティブの SDF を特徴付けている。同様に、Davis(2001)は対数型効用関数と累積 HDD に比例する収益から求まる最適消費点によって SDF を特徴付け、天候デリバティブの価格付けを行った。このように消費資産価格モデルでは、SDF の特徴付けに予め何らかの効用関数の仮定を要するが、実際上の効用関数の同定は難しい。加えて、代表的経済主体は、不完備市場での存在が保証されない。

⁴ 米国商務省の報告によると、米国の国内総生産 9 兆ドルのうちその約 22% が天候の影響を受けている。

そこで本論文では、はじめに効用関数や代表的経済主体を必要としない SDF の特徴付けを用いて、気温に基づく天候デリバティブの価格付けを行う。そして次に、電力自由化後の電力会社の収益リスクに対し、天候デリバティブを用いたリスク管理について議論する。

効用関数や代表的経済主体に準拠しない不完備市場での価格付け手法の一つとして、シャープレシオの最大値から SDF に分散条件を与えて価格を範囲で評価する手法がある。Cochrane and Saa-Requejo(2000)のグッドディールバウンズ(Good Deal Bounds: GDB)である。GDB では、あり得る価格の範囲として、無裁定価格の価格範囲よりも小さな価格範囲を求めることができる。加えて、GDB に用いるシャープレシオは、リスクとリターンを捉える指標として実務でも一般的に用いられる。これらの利点を踏まえ、まずはじめに、GDB を天候デリバティブの価格付けに適用し、実装するためのデリバティブ価格に関する偏微分方程式を導出する。

次に実証研究では、ヒストリカルデータによるモデルパラメーターの推定値を用いて、偏微分方程式を数値的に解くことで天候デリバティブの価格付けを行う。まず、東京の気温データと日経225株価インデックスデータを用い、気温と株価の確率過程のパラメーターを同時推定する。そして、天候デリバティブが株式市場に新たに導入され、市場全体のシャープレシオ⁵が最大でもとの2倍もしくは3倍になると仮定し、偏微分方程式を有限差分法によって解くことで天候デリバティブを価格付けする。

さらに本論文では、天候デリバティブを用いた電力会社のリスク管理について議論する。問題設定として、自由化後の電力市場で電力会社がしばしば遭遇する状況、すなわち、小売価格が固定される一方で、市場から電力を強制的に調達するような状況を想定する。このような状況下において、電力会社が天候デリバティブを活用したリスクヘッジを行う場合のヘッジ手法について分析する。⁶そのために、相対契約のように天候デリバティブのポジション

⁵ すなわち、リスクの市場価格である。

⁶ 2000年夏から翌年にかけて起きたカリフォルニアの電力危機では、高騰する電力市場での卸売価格と固定された小売価格の逆鞘によって大手電力会社(地域電力供給会社)は経営危機に追い込まれた。電力危機を誘発した大きな原因の一つが夏期の猛暑と冬期の厳冬であり、これによって電力需要量が増大し、市場価格も高騰したが、電力会社は需要量変動とそれに対応した価格変動に対するリスク管理を行っておらず、リスクを全て抱え込むこととなった。当時、価格リスクに対してこれら大手電力会社の関心が低かったことも事実であるが、その背景には、取引がスポット市場に集中するように、価格変動を固定する先渡し契約等の長期契約が禁止されたという制度的な問題点もあった。しかし、電力会社が破綻に追い込まれたのは制度的な問題で、先渡し契約等の電力価格に関するデリバティブが使えないと本当にリスク管理が出来なかったのかという点に関して再考する必要がある。そこで一つのアイデアとして、電力危機を引き起こした原因の一つである気温変動に着目し、天候デリバティブの適用について検討する。

を変更できない場合のリスク管理について検討する。ここでは、電力会社のコストに相当する価格と需要量の積の増加リスクに焦点を当て、このリスクをヘッジするための新たな天候デリバティブの商品設計とプライシングを行う。そして実際の米国での気温データ並びに PJM 電力市場での価格と需要量のデータをを用い、価格付けに必要な気温モデル、気温と需要量の回帰式および需要量と価格の回帰式のモデルパラメーターをそれぞれ推定した上で、コストに相当する電力価格と需要量の積の増加リスクをヘッジするための、気温に基づくヨーロッパ型コールオプション価格を数値解法によって求める。

本論文の構成は以下の通りである。第 2 節では、Cochrane and Saa-Requejo(2000)の GDB を天候デリバティブの価格付けに適用し、天候デリバティブのインデックスである累積 CDD のオプション価格について、連続時間での偏微分方程式を導く。第 3 節では、東京の気温および株価データをもとに、実証分析として累積 CDD オプションの価格付けを行う。第 4 節では、電力会社のコストの増加リスクをヘッジするための天候デリバティブの設計と価格付け手法について論じる。最後に、第 5 節では以上の結果を踏まえ、結論と今後の課題について述べる。

2. モデル

2.1 天候デリバティブとグッドディールバウンズ

天候デリバティブのプライシングでは、市場の不完備性に基づくプライシングの困難さを克服しなければならない。完備市場の資産では、確率的割引ファクター(Stochastic Discount Factor: SDF)が市場で一意に決まるため、その価格も一意となるが、天候デリバティブのような不完備市場で取引される資産は、整合的な SDF が複数存在し、デリバティブ価格が一意に決まらない。

不完備市場でのアセットプライシング手法の一つとして、既存資産では複製できないリスクに対し、想定するリスクとリターンとの関係をもとに、価格に上下の幅を持たせて価格付けする手法がある。Cochrane and Saa-Requejo(2000)のグッドディールバウンズ(Good Deal Bounds: GDB)である。例えば、既存の株式市場で新たなリスクを持つ天候デリバティブを付け加えて取引することを考えよう。新たなリスクの取引ができるので、市場全体のシャープレシオは増大するが、それには限界があると考えるのが自然である。(そうでないと、いくらでも良い投資機会 - good deal - が存在することになる。)そこで、そのシャープレシオの最大値が存在するとする⁷。

⁷ 例えば、市場での投資家の効用と消費プロセスが次のように規定される場合、市場全体のシャープレシオの最大値は計算可能であることが知られている。投資家がべき型の効用関数を持つとする。

$$u(c) = \beta \frac{1}{1-\gamma} c^{1-\gamma}$$

また、消費が対数正規過程に従うとすると Cochrane(2000)および Lettau and Uhlig(2002)で示されたよ

このとき、Hansen and Jagannathan の関係式から、SDF のリターンのボラティリティーはシャープレシオの最大値の関数によって有界となる。その結果、シャープレシオの最大値を所与とすると、SDF が取り得る値は制約され、資産価格が取り得る値にも上・下限が生じることになるのである。

Cochrane and Saa-Requejo(2000)に従い、GDB によるプライシング手法を連続時間モデルで表現する。時点 s のペイオフが x_s^c で、最終時点 T のペイオフが x_T^c となる資産について、 A を最大シャープレシオと置いた SDF(Λ)の制約条件(式(4))のもと、全てのペイオフの現在価値が最小となる SDF(Λ)を選択する最適化問題を考え、その最小値を価格下限値とする。

$$\underline{C}_t = \min_{\{\Lambda_s, t \leq s \leq T\}} E_t \left[\int_t^T \frac{\Lambda_s}{\Lambda_t} x_s^c ds + \frac{\Lambda_T}{\Lambda_t} x_T^c \right] \quad (1)$$

s . t .

$$\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t} = \frac{d\Lambda_t^*}{\Lambda_t^*} - v dz_t \quad (2)$$

$$\frac{d\Lambda_t^*}{\Lambda_t^*} = -r dt - \phi dw_t \quad (3)$$

$$\frac{1}{dt} E_t \left[\frac{d\Lambda_t^2}{\Lambda_t^2} \right] \leq A^2 \quad (4)$$

ここで、式(3)は既知数である株式市場のリスクの市場価格(ϕ)による SDF(Λ_t^*)を表現し、式(2)は未知数である天候リスク(dz)の市場価格(v)に、既知数である株式市場のリスクの市場価格(ϕ)を合算した SDF(Λ)を表現している。この最小化問題での SDF(Λ)の選択は、株式市場では張れない(株式では複製できない)天候リスクの市場価格 v の選択を意味する。一方、以上の最小化問題において、式(1)の目的関数が最大となる SDF(Λ)を選択する場合、最大値が価格の上限値となる。

うに、シャープレシオの最大値は相対的危険回避度 γ と消費過程の拡散係数の積で表現される。

$$SR_t^{\max} = \sqrt{e^{\gamma^2 \sigma^2 (\Delta \ln c_{t+1})} - 1} \cong \gamma \sigma (\Delta \ln c_{t+1})$$

即ち、市場参加者がリスク回避的であればあるほど、消費リターンのボラティリティーが大きければ大きいほど、値が大きくなるような最大シャープレシオが存在する。

2.2 天候デリバティブの設計

本節では、主に欧米諸国で用いられる累積ディグリーデイという気温インデックスを原資産とする天候デリバティブを設計する。そこで、気温インデックスである累積ディグリーデイについて、エネルギー需要量との関係をもとに説明しよう。

気温とエネルギー需要量の相関関係を観察すると、夏に気温がある温度以上になるとエアコン消費による電力需要等のエネルギー需要量が増大するが、逆に冬にある一定気温以下になると暖房のために再びエネルギー需要量が増大する。このように、エネルギー需要量を測る上で、夏の場合、ある基準温度に対する気温の超過値が指標となり、逆に冬の場合、ある基準温度に対するその日の気温の未満値が指標となる。これらの気温の乖離値のことをディグリーデイと呼び、前者をクーリングディグリーデイ(Cooling Degree Days: CDD)、後者をヒーティングディグリーデイ(Heating Degree Days: HDD)と呼ぶ。そこでこれらの関係を式で表現すると、次のようになる。

$$CDD_t \equiv \max\{T_t - T_B, 0\} \quad (5)$$

$$HDD_t \equiv \max\{T_B - T_t, 0\} \quad (6)$$

T_t は時点 t の気温、 T_B は基準に選んだ気温である。例えば、基準気温 T_B が 17 とする。ある日の気温 T_t が 25 のとき、気温と基準温度との差 $25 - 17 = 8$ は 0 より大きく、CDD は 8 で HDD は 0 と計算される。一方、気温が 10 のとき、気温と基準温度との差 $10 - 17 = -7$ は 0 より小さく、CDD は 0 で HDD は 7 となる。

このディグリーデイを用いて、エネルギー消費者や生産者がリスク管理を行う場合、1 日ではなく 1 週間といった一定期間のディグリーデイの合計が重要になる。例えば 3 日間の CDD が 5、8、0 のとき、累積値は 13 である。このように一定期間のディグリーデイの和を累積ディグリーデイとして計算し、実務上これをリスク管理の指標に用いている。累積 CDD および累積 HDD は将来のある一定時点(t_1)からその先の一定時点(t_2)までの CDD および HDD の和として次式でそれぞれ定義される。

$$\text{累積CDD} \equiv \sum_{i=t_1}^{t_2} CDD_i \quad (7)$$

$$\text{累積HDD} \equiv \sum_{i=t_1}^{t_2} HDD_i \quad (8)$$

連続時間の場合、 $t_1 = 0$ 、 $t_2 = t$ と置き、累積 CDD(I_t)を近似的に次式で表現する。

$$I_t = \int_0^t \max(T_\tau - T_B, 0) d\tau \quad (9)$$

同様に累積 HDD(I_t)を近似的に次式で表現する。

$$I_t = \int_0^t \max(T_B - T_\tau, 0) d\tau \quad (10)$$

本節では、累積 CDD というインデックス I の関数でペイオフが表現される天候デリバティブを設計してプライシングを行う。具体的には、ストライクが K で最終期ペイオフ $f(I_T)$ が次式で表現されるヨーロッパ型コールオプションを設計して価格付けする。

$$f(I_t) = \max(I_T - K) \quad (11)$$

2.3 天候デリバティブの価格付けモデル

GDB によって天候デリバティブの価格付けを行う際、ベースとなる完備な株式市場の価格の動きを記述するため、株式市場の価格リターンが次の対数正規過程に従うものとする。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_s dt + \sigma_s dw_t \quad (12)$$

ここで μ_s および σ_s は単純化のため一定値とする。また、 r_f をリスクフリーレートとすると、株

式市場でのリスクの市場価格 ϕ は $\phi = \frac{\mu_s - r_f}{\sigma_s}$ で表現される。

次に天候デリバティブのインデックスを計算するため、気温をモデル化する。ある年数蓄積された気温データについて、異なる年の同日の気温についての平均値 $\bar{T}_t$ を平年値と定義する⁸。平年値との気温の乖離 X_t は時間の経過と共に消滅するため、乖離が平均回帰型オルンシュタイン-ウーレンベック過程(以下“平均回帰過程”と呼ぶ。)でモデル化できると仮定する。ここで、株価の拡散項 dw_t と気温の拡散項 dv_t との相関係数を ρ とし、直交する拡散項を dz_t とする。すなわち、株式市場のリスクに新たに加わった直交するリスクを dz で表現する。以上の仮定を用いると、気温(T_t)は式(13)、式(14)及び式(15)を使って表現される。

⁸ 平年値は年間の気温の確定的なトレンドを示す。

$$T_t = X_t + \bar{T}_t \quad (13)$$

$$dX_t = (\mu_X - \lambda_X X_t)dt + \sigma_X dv_t \quad (14)$$

$$dv_t = pdw_t + \sqrt{1-p^2} dz_t \quad (15)$$

ただし、 μ_X 、 λ_X 、 σ_X および p は一定値とする。このモデルによって、気温 T_t は季節的に変動する確定項 $\bar{T}_t$ とその確定項からの平均回帰する乖離項 X_t の和によって表現される。ただし、このモデル化は GDB に適用可能な単純化したモデルであって、気温モデルの更なる検討は補論 A で行う。

以上の株価と気温の確率過程を用いることで、天候デリバティブのプライシングモデルは命題 1 となる。

命題 1 天候デリバティブが市場に導入されたことで達成されるシャープレシオの最大値が A であるとする。株価 $\underline{S}$ が式(12)で表現され、気温の乖離 X が式(14)で表現されると仮定する。加えて、デリバティブのペイオフを構成する気温インデックスを I とする。このとき、ヨーロッパ型天候デリバティブ $\underline{C}$ の価格の上・下限値は次の偏微分方程式を離散化し、数値的にバックワードに解くことで求まる。

$$\begin{aligned} & -r\underline{C} + \frac{\partial \underline{C}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_s^2 \underline{S}^2 \frac{\partial^2 \underline{C}}{\partial \underline{S}^2} + \frac{1}{2}\sigma_X^2 \frac{\partial^2 \underline{C}}{\partial X^2} + \rho\sigma_s\sigma_X \underline{S} \frac{\partial^2 \underline{C}}{\partial X \partial \underline{S}} + \frac{dI}{dt} \frac{\partial \underline{C}}{\partial I} \\ & = -r\underline{S} \frac{\partial \underline{C}}{\partial \underline{S}} + \left(\frac{\mu_s - r}{\sigma_s} \rho\sigma_X - \mu_X + \lambda_X X + k \sqrt{A^2 - \left(\frac{\mu_s - r}{\sigma_s} \right)^2} \sigma_X \sqrt{1 - \rho^2} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \underline{C}}{\partial X} \right) \right) \frac{\partial \underline{C}}{\partial X} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、期末ペイオフを

$$\underline{C}(\underline{S}, X, I, T) = f(I_T) \quad (17)$$

と定義する。 $k = +1$ および $k = -1$ の場合、価格下限値および上限値をそれぞれ計算する。

証明 証明は補論 B 参照。

なお、 $\frac{dI}{dt}$ は Ingersoll(1987)に従うものとし、累積 CDD をインデックス I とする場合、式(16)

の $\frac{dI}{dt}$ は次式で表現される。

$$dI = \max(X_t + \bar{T}_t - T_B, 0) dt \quad (18)$$

3．天候デリバティブ価格の実証研究

本節では、日本での過去の気温並びに株価データを用いた確率過程の同時パラメーター推定を行った上で、式(16)および式(17)で記述される偏微分方程式を有限差分法によって数値的に解くことで、天候デリバティブのプライシングを行う。第3．1節で使用データについて説明し、第3．2節では、株価と気温過程の同時パラメーター推定について述べる。第3．3節では、天候デリバティブの株式市場への新たな導入で市場全体のシャープレシオがもとの2倍もしくは3倍になると仮定して、第2．3節の偏微分方程式を用いた契約期間を6月とするヨーロッパ型累積CDD コールオプションの価格を求める。

3．1 データ

第3節で使用するデータは、株価と気温の2種類である。データ期間は1995年1月4日から1999年12月30日までとし、期間中の日次データを用いる。株価には、日本の株式市場全体の動きを近似的に捉えるため、株価指標である日経225の終値を用いる。⁹一方、気温には、東京の日平均気温データを利用する。¹⁰ただし、平年気温は東京における1961年1月1日から2000年12月31日の各日付の40年平均値によって算出し、気温の乖離 χ は1995年1月4日から1999年12月30日までの日平均気温と平年気温の差によって予め計算する。

3．2 パラメーター推定

本節では、完備な株式市場の価格リターンモデルと株式市場に不完備性をもたらす気温モデルの同時パラメーター推定を最尤推定法で行う。推定するパラメーターは、式(12)で表現される株価リターンモデルのパラメーター μ_s 、 σ_s 及び式(14)で表現される気温乖離の平均回帰モデルのパラメーター μ_χ 、 λ_χ 、 σ_χ 並びに式(15)の ρ である。

推定手順として、式(12)と式(14)をそれぞれ離散化した式(19)と式(20)について最尤推定法でパラメーターを求めた後、このパラメーター推定値を連続モデルのパラメーター値に変換する。

⁹ 日経クイック社から入手した。

¹⁰ 日本気象協会提供のデータを用いる。

以上を式で表現すると次のようになる。まず株価の対数に関する確率過程の離散式は

$$\Delta \log S_t = \left(\beta_0 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) + \varepsilon_{1t} \quad (19)$$

となる。¹¹ また、気温の平年からの乖離 X_t を $AR(1)$ モデルで離散化すると、

$$\Delta X_t = \alpha_0 - \alpha_1 X_t + \varepsilon_{2t} \quad (20)$$

のように記述できる。ただし、 $\varepsilon \sim N(\mu, \Sigma)$ 、 $\varepsilon = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$ 、 $\mu = (0, 0)$ 、 $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_0 \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho_0 \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$

とする。

式(19)と式(20)のパラメーター β_0 、 σ_1 及び α_0 、 α_1 、 σ_2 に関する最小二乗推定値を初期値とし、¹²最尤推定法を用いた同時パラメーター推定を行う。¹³推定結果を表1に示す。

パラメータ	β_0	σ_1	α_0	α_1	σ_2	ρ_0
推定値	0.0001	0.015	0.317	0.472	2.128	0.056
標準誤差	0.0004	0.000	0.062	0.023	0.043	0.028
対数尤度	7.78×10^2					
AIC	-1.54×10^3					
SIC	-1.56×10^3					

表1．最尤法によるパラメータ推定(日経225と東京の気温)

表1の標準誤差から判断すると、 σ_1 、 α_0 、 α_1 、 σ_2 及び ρ_0 は統計的に有意である。特に、パラメーター α_1 が統計的に有意な0以上1以下の推定値(0.472)であることから、気温の乖離の平均回帰性を捉えることができた。すなわち、気温の平年値からの乖離が時間経過とともに収束する特性をデータの上で捉えることができた。また、株価リターンと気温の相関係数 ρ_0 は統計的に有意であるが、0に近い値となった。従って、データの上では気温リスクを株価リスクで張れる割合は0ではないが、非常に小さな割合に留まっている。式(12)と式(14)の連続時間モデルにおけるパラメーター μ_s 、 σ_s 、 μ_x 、 λ_x 、 σ_x 、 ρ は以下の変換式によって求められる。¹⁴

¹¹ 伊藤の公式で株価の対数の確率過程を求めた後、離散化を行う。

¹² ρ_0 に関しては0.5を初期値とする。

¹³ 初期的なパラメーター推定において、 β_0 は統計的に有意ではなかった、これを0として推定を行った。

¹⁴ ρ_0 は統計的に有意と言いが、GDBでのシャーププレシオ計算にとって必要な値であるため、表1のパラメーター値を用いる。

$$\mu_s = \beta_0, \quad \sigma_s = \sigma_1 \quad (21)$$

$$\mu_x = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \ln(1 - \alpha_1), \quad \lambda_x = -\ln(1 - \alpha_1)$$

$$\sigma_x = \sigma_2 \sqrt{\frac{2 \ln(1 - \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)^2 - 1}}, \quad \rho = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_s \sigma_x} \frac{\lambda_x}{1 - e^{\lambda_x}} \rho_0 \quad (22)$$

連続時間モデルのパラメーター変換結果を表2に示す。

パラメータ	μ_s	σ_s	μ_x	λ_x	σ_x	ρ
換算値	0.0001	0.0146	0.4284	0.6387	2.8316	0.0564

表2. パラメータ換算値(連続時間モデル)

以上のパラメーター推定結果を用いて、次節以降で天候デリバティブのプライシングを行う。¹⁵

3.3 累積 CDD オプションの価格付け

式(16)と式(17)で定式化した天候デリバティブ価格の偏微分方程式を用いて、6月の30日間の累積CDDを原資産とするヨーロッパ型コールオプションの価格範囲を求める。式(16)を株価(S)、気温の平年からの乖離(X)、累積CDD(I)及び時間(t)について離散化し、有限差分法のうち陽解法を用いることで価格上・下限値を得る。ヨーロッパ型コールオプションの境界条件は、満期 T において次式で与えられる。

$$\underline{C}(S, X, I, T) = \max(I_T - K, 0) \quad (23)$$

ただし、 K を行使価格とする。さらに、株価(S)、気温の平年からの乖離(X)、累積CDD(I)について、計算領域の上・下限で関数の傾きがそれぞれ0となるノイマン条件を課す。これは、計算

¹⁵ 6月の各日付についての平年気温 $\bar{T}_t$ は、簡略化のため、6月の平年気温データによる時間 t の線形近似式を用いる。

$$\bar{T}_t = bt + a$$

パラメーター b 、 a に対する最小二乗法による推定結果は以下の通りとなる。ただし、括弧内は t 統計量である。

$$b = 0.0703 \text{ (10.18)}, \quad a = 20.8617 \text{ (170.06)}$$

領域の端で各成分方向についてオプション価格に変化がなく、同じ値となることを意味する。

瞬間のリスクフリーレートを0.004%と仮定し、¹⁶表2で得られた推定結果を用いると、株式市場のリスクの市場価格 ϕ は 4.11×10^{-3} と計算される。そこで天候デリバティブが株式市場で新たに取引されることで、シャープレシオの最大値が株式市場のリスクの市場価格 ϕ の2倍もしくは3倍、すなわち 8.22×10^{-3} もしくは 12.33×10^{-3} となる場合を想定し、オプション価格を計算する。ただし、式(5)におけるCDDの基準気温 T_B を17とし、オプションのストライク K を150、初期累積CDDを0とする。¹⁷

6月の30日間の累積CDDが150を超過する場合に支払いが行われる累積CDDコールオプションの6月1日時点での価格の下限値、上限値、ゼロ天候リスクプレミアムの価格をそれぞれ図1に示す¹⁸。

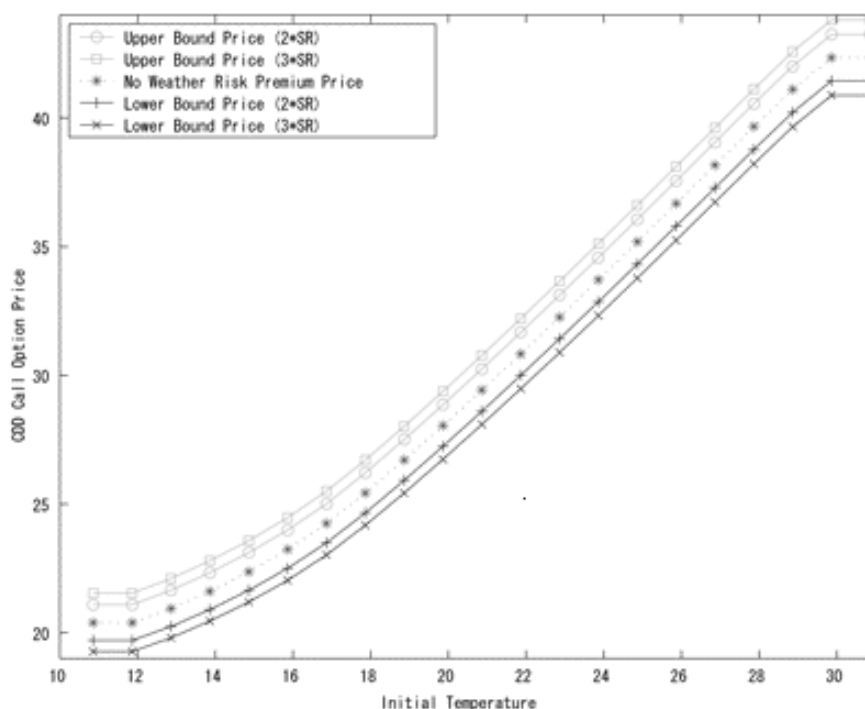


図1．累積CDDコールオプション価格

¹⁶ 年率0.1%のリスクフリーレートは取引日数250日として日率0.004%となる。これを瞬間のリスクフリーレートと仮定する。

¹⁷ 6月の平均気温を22 とすると、6月の平均CDDは $22 - 17 = 5$ となる。従って、累積CDDは 5×30 日で150となる。この値をストライクとする。

¹⁸ ゼロ天候リスクプレミアム価格とは、シャープレシオの最大値が株式市場のリスクの市場価格と一致するときの価格を指す。

ただし、このときの株価水準は7,000円とする。図1より、GDBのフレームワークを用い、シャープレシオの最大値が株式市場の2倍もしくは3倍であるとの仮定のもと、¹⁹初期気温を与えた場合の累積CDDコールオプションの価格上・下限値を算出できた。加えて、天候リスクの市場価格をゼロとすることで、ゼロ天候リスクプレミアムの累積CDDコールオプション価格も同時に算出できた。特にGDBを用いた利点として、価格上限値もしくは価格下限値とゼロ天候リスクプレミアム価格の差、すなわち図1における最上限・最下限のラインと中央のラインの差もしくは上から2番目の上限・下から2番目の下限と中央のラインの差として、シャープレシオが3倍および2倍となる場合の天候リスクプレミアムをそれぞれ算出することができた。例えば、6月1日の気温(初期気温)が21²⁰でシャープレシオの最大値が株式市場の2倍のとき、累積CDDコールオプションの価格下限値は28.6で価格上限値は30.2である。また、ゼロ天候リスクプレミアム価格は29.4となる。従って、天候リスクプレミアムは下限値の場合、 $29.4 - 28.6 = 0.8$ となり、上限値の場合、 $30.2 - 29.4 = 0.8$ となる。さらに、図1に示す全ての価格に共通な特徴として、初期気温が高いほど累積CDDコールオプション価格が大きい。例えばシャープレシオの最大値が株式市場の2倍として、6月1日の気温が11、21、31と上昇すると、価格上限値は21.1、30.2、43.2と上昇する。これは、初期気温が高いと累積CDDがストライクを上回る確率が大きく、コールオプション価格が高くなる価格特性を反映したものである。

第3節では、GDBを用いて累積CDDといった標準的な天候デリバティブの価格付けを行った。しかし、ポジションを変更できない場合、電力会社のリスク管理上、電力量といったボリュームリスクはこのデリバティブでヘッジできるが、電力価格リスクはヘッジできない。そこで次節では、ボリュームリスクに加えて価格リスクをヘッジ可能な新たな天候デリバティブを設計することで、電力会社のリスクヘッジについて議論する。

4．電力会社のリスクヘッジと天候デリバティブの設計

4．1 電力リスクをヘッジする天候デリバティブ

電力市場からスポット価格で電力を調達し、先渡し価格などの一定価格で消費者に電力を供給する地域電力供給会社にとっての最大のリスクは、コストに相当する価格と需要量の積の増加リスクで、このリスクのヘッジがリスク管理上重要となる。²¹このような状況は一般的に多くの自由化された電力市場で観察される。例えば、2005年4月にスタートした日本卸電力市場への参加者である電力会社が、市場からスポット価格²²で電力を調達しているとしよう。消費者への供給契約

¹⁹ 株式市場という完備市場に天候デリバティブという新たな資産が導入され、市場全体のシャープレシオが2倍もしくは3倍になった場合である。

²⁰ 1961年から2000年の6月1日の東京の平均気温が21である。

²¹ この積の増加リスクは、例えばオフィスビルやショッピングセンターのように、電力消費量のうちエアコン消費量が主要となる施設が全電力量を市場から調達する場合の買電コストの増加リスクに相当する。

²² 日本では一日前先渡し契約をスポット価格としている。

上の受け渡し価格が一定の場合、電力会社は電力価格変動と消費者の需要量変動の両者のリスクに曝される。そこで、両者のリスクが気温に依存することを考慮に入れ、第4節では、電力会社のコストに相当する電力価格と需要量の積の増加リスクをヘッジするための気温に基づいたコールオプションをデザインして価格付けする。

従来、ボリュウムリスクである需要量変動は、気温との強い相関関係から、天候デリバティブでのヘッジが行われてきた。それに対して、価格リスクのヘッジには、電力価格を原資産とする電力デリバティブが用いられてきたが、電力デリバティブは一般的に“エキゾチック”と呼ばれ、仕組みが複雑なために相対契約が主で、結果的にコストが割高となる。その上、カリフォルニア電力危機のときのように利用が制限されるケースも存在した。このように電力デリバティブは天候デリバティブに比べて実務上の利用が限定的である。そこで、気温に基づいた電力価格のリスクヘッジについて、まずその問題点を浮き彫りとした上で、これを克服するための天候デリバティブのデザインについて論じる。

まず、従来の天候デリバティブを電力価格のリスクヘッジに適用すると、大きなヘッジエラーが生じるという問題点について説明する。電力需要量と気温の関係は、閾値となる気温より高いとそれに応じて線形的に需要量が高く、閾値より低いと同様に線形的に需要量が増加する相関関係にある。従って、横軸に気温、縦軸に電力需要量を取るとV字型の関数で表現される。これは、夏に気温がある温度に達するとエアコン消費量が増大し、逆に冬になると、ある一定気温以下で暖房のため電力消費量が増大するからである。この特徴に着目したのが、第2.2節で説明したディグリーデイである。以下では夏期の気温と電力価格の関係に限定して議論を進める。²³基準温度を電力需要量のV字型の先端に相当する温度 T_0 と設定した CDD および累積 CDD を定義する。

$$CDD_t \equiv \max\{T_t - T_0, 0\} \quad (24)$$

$$\text{累積CDD} \equiv \sum_{i=t_1}^{t_2} CDD_i \quad (25)$$

ただし、 T_t は時点 t の気温であり、累積 CDD は将来のある一定時点(t_1)からその先の一定時点(t_2)の値とする。ここで、電力需要量は T_0 を上回る温度すなわち CDD と伴に線形に増加するため、

$$D_i = a_1 CDD_i + D_0 \quad (26)$$

の関係となる。ただし、 a_1 は定数とし、 D_0 は T_0 に対応する需要量とする。従って、累積 CDD

²³ 冬期の場合も同様の議論が HDD を用いて可能である。

は当該期間の気温が T_0 を上回った日の需要量の和を表現したものとなる。すなわち、累積 CDD による天候デリバティブ契約は、電力需要量の和に関する線形ヘッジに相当する。一方、電力価格と電力需要量の関係は、Kanamura and Ohashi(2006)に示す PJM 市場の観察からもわかるように、累積 CDD によってヘッジ可能な単純線形関係ではなく、2本の直線を繋ぎ合わせた Hockey-Stick 形状の単調増加関数で表現される。ここで、電力需要量と価格の関係を $P = f(D)$ で表現すると、ある一定期間の電力価格の和は

$$\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n f(D_i) \quad (27)$$

となる。したがって、式(26)を用いて一般的な累積 CDD すなわち電力量の線形関数で電力価格を表現すると、次のような誤差(E)が生じる。

$$E = \sum_{i=1}^n (P_i - (k_1 D_i + k_2)) \quad (28)$$

$$= \sum_{i=1}^n (f(a_1 CDD_i + D_0) - (k_1 (a_1 CDD_i + D_0) + k_2)) \quad (29)$$

ただし、 k_1 および k_2 は定数とする。このように、電力価格は需要量の非線形な単調増加関数で表現される可能性が高いのに対し、累積 CDD は需要量と線形関係にあるため、累積 CDD と電力価格の間には誤差が生じてしまうことになる。

そこで、このような誤差を生まない天候デリバティブの設計を行うため、累積 CDD に重みを付けた重み付き累積 CDD を定義しよう。

$$\text{重み付き累積CDD} \equiv \sum_{i=t_1}^{t_2} w_t \max\{T_t - T_0, 0\} \quad (30)$$

ここで、 w_t は時点 t での CDD に関する重み関数と定義する。²⁴また $t_1 = 0$ および $t_2 = t$ と置い

²⁴ 重みが1の場合、通常の累積 CDD となる。具体的な例として、需要量リスクをヘッジする場合、累積 CDD と線形の

$$w_t = k \quad (\text{一定}) \quad (31)$$

て連続時間で表現すると、重み付き累積 CDD(I_t)は近似的に次式となる。

$$I_t = \int_0^t w_\tau \max(T_\tau - T_0, 0) d\tau \quad (33)$$

電力価格と需要量の積をヘッジする場合、通常の CDD 部分がボリュームを反映しており、需要量の供給曲線による変換値が価格を表現するため、次のような重み関数となる。

$$w_t = \begin{cases} f(a_1(T_t - T_0) + D_0) \frac{a_1(T_t - T_0) + D_0}{T_t - T_0} & (T_t - T_0 > 0) \\ 0 & (T_t - T_0 \leq 0) \end{cases} \quad (34)$$

この重み関数の導入で、従来の累積 CDD を価格のリスクヘッジに用いた場合に生じる誤差を除去することが可能となる。

そこで第 2 . 3 節の命題 1 を用い、インデックス I をペイオフにもつ天候デリバティブのプライシングを行う。ただし、式(16)を計算する上で必要な $\frac{dI}{dt}$ は Ingersoll(1987)に従い、次式を用いる。

$$dI = w_t \max(X_t + \bar{T}_t - T_0, 0) dt \quad (35)$$

次節では本節で説明したモデルを用いた実証分析を行う。

4 . 2 モデルの推定

本節では、同時に入手が可能な米国の電力市場データおよび気温データを用いて、モデルの推定を行う。使用するデータは、株価、気温、電力需要量、電力価格の 4 種類である。まず、株

となる。電力価格のヘッジを行う場合、誤差を取除くため、両者の関数関係 $P = f(D)$ をベースとした次のような重み関数を用いる。

$$w_t = \begin{cases} f(a_1(T_t - T_0) + D_0) \frac{1}{T_t - T_0} & (T_t - T_0 > 0) \\ 0 & (T_t - T_0 \leq 0) \end{cases} \quad (32)$$

価と気温データは、完備な株式市場の価格リターンモデルと株式市場に不完備性をもたらす気温モデルの同時パラメーター推定に用いる。データ期間は1998年4月1日から2002年3月31日までとし、日次データを利用する。株価には、米国の株式市場全体の動きを近似的に捉えるため、S&P500の修正済み終値を用いる。²⁵一方、平均気温には、PJM 電力市場の中心都市である、フィラデルフィア、ボルチモア、ニューアークの3都市の平均気温を用いる。²⁶ただし、平年気温は1998年4月1日から2002年3月31日の各日付の4年間の平均気温によって算出し、気温の乖離 X は同期間の日平均気温と平年気温の差によって予め計算する。一方、電力需要量と電力価格の関数を同定するため、PJM 市場のスポット価格と電力需要量データを用いる。データはPJM 市場のウェブサイトから入手した。

次にモデルのパラメーター推定を行う。ここで推定すべきモデルは、株価と気温の確率過程、気温と電力需要量の関係式、電力需要量と電力価格の関係式である。まず第3.2節の手法に従って、式(12)および式(14)で表現される株価と気温の確率過程を同時推定する。推定するパラメーターは式(14)の μ_s および σ_s 並びに式(14)の μ_x 、 λ_x 、 σ_x と式(15)の両者の相関係数 ρ である。そこで両式を離散化した式(19)及び式(20)のパラメーター β_0 、 σ_1 及び α_0 、 α_1 、 σ_2 に関して、それぞれの式での最小二乗推定値を初期値とし、²⁷ 最尤推定法によってパラメーターを同時推定する。²⁸

パラメータ	β_0	σ_1	α_0	α_1	σ_2	ρ_0
推定値	0.0007	0.013	0.140	0.370	4.797	0.000
標準誤差	0.0006	0.000	0.213	0.034	0.149	0.278
対数尤度	-2.90×10^1					
AIC	7.01×10^1					
SIC	5.81×10^1					

表3. 最尤法によるパラメータ推定(S & P500とPJM市場の気温)

表3に示す推定結果において、それぞれの標準誤差から判断すると、 σ_1 、 α_1 、 σ_2 はともに統計的に有意である。特にパラメーター α_1 が統計的に有意な0以上1以下の推定値(0.370)であることから、気温の乖離過程の平均回帰性を得ることができた。この結果は東京の気温データを用いた表1の推定結果と一致する。一方、株価リターンと気温の相関係数 ρ_0 は統計的に有意ではない。式(12)及び式(14)の連続時間モデルにおけるパラメーター μ_s 、 σ_s 、 μ_x 、 λ_x 、 σ_x 、 ρ は第

²⁵ ブルームバーグ社から入手した。

²⁶ 米国海洋大気庁(National Oceanic and Atmospheric Administration: NOAA)のデータを用いた。

²⁷ 相関係数 ρ_0 は0.1を初期値とする。

²⁸ 初期的なパラメーター推定において、 β_0 は統計的に有意ではなかった、これを0として推定を行った。

3．2節の手法に従うと表4の通りとなる。²⁹

パラメータ	μ_s	σ_s	μ_x	λ_x	σ_x	ρ
換算値	0.0007	0.0129	0.4619	0.1751	5.9374	0.0000

表4．パラメータ換算値(連続時間モデル)

続いて、気温と電力需要量のV字型関数のパラメーター推定を行う。ここで、横軸に PJM 市場の気温をとり、縦軸に PJM 市場の電力需要量をとって、4年間分のデータの散布図で表現すると図2のようになる。

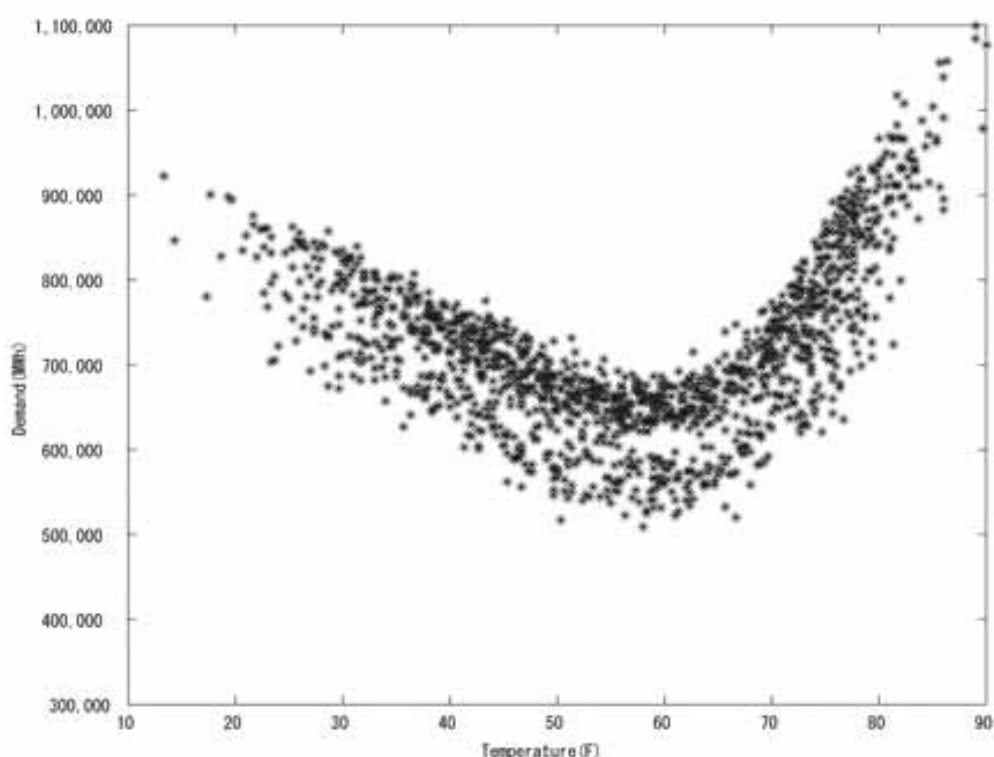


図2．PJM 市場における気温と電力需要量

図2によると両者の関係は60(F)付近をV字の端点とするV字型関数で表現される。このV字関数を式で表現するため、電力需要量を D_t 、気温を T_t とし、次の Hockey-Stick 回帰モデルを

²⁹ β_0 は統計的に有意と言いが、GDBにおけるシャープレシオ計算での必要性から、表3におけるパラメーター値を用いる。また、6月の各日付の平年気温 $\bar{T}_t$ は、簡略化のため、6月の平年気温データによる時間 t の線形近似式を用いる。

$$\bar{T}_t = bt + a \quad (36)$$

パラメーター b 、 a を最小二乗法により求めると、推定結果は以下の通りとなる。ただし、括弧内は t 統計量である。

$$b = 0.3395 \text{ (4.89)}, \quad a = 67.4490 \text{ (52.93)} \quad (37)$$

用いる。

$$D_t = g(T_t) = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 T_t + \varepsilon_t & (T_t \leq z_1 - s_1) \\ a_1 + b_1 T_t + c_1 T_t^2 + \varepsilon_t & (z_1 - s_1 < T_t < z_1 + s_1) \\ \gamma_1 + \delta_1 T_t + \varepsilon_t & (T_t \geq z_1 + s_1) \end{cases}$$

(38)

$$x_1 = z_1 - s_1, \quad y_1 = z_1 + s_1, \quad a_1 = \alpha_1 + \beta_1 x_1 - b_1 x_1 - c_1 x_1^2$$

$$b_1 = \frac{y_1 \beta_1 - x_1 \delta_1}{y_1 - x_1}, \quad c_1 = \frac{\delta_1 - b_1}{2y_1}, \quad \gamma_1 = -\delta_1 y_1 + (a_1 + b_1 y_1 + c_1 y_1^2)$$

ここで推定されるパラメーターは、負の傾きを持つ直線の切片、傾きを表す α_1 、 β_1 、傾きが正となる直線の傾き δ_1 に加えて、V 字の端点となる z_1 および 2 直線を滑らかに繋ぐ 2 次関数の定義域の大きさを表す s_1 である。

推定結果を表 5 に示す。

パラメータ	α_1	β_1	δ_1	z_1	s_1
推定値	961,100	-6,151	19,160	64.01	11.41
t 統計量	102.61	-27.81	20.60	116.62	11.68
対数尤度	-17814.84				
SIC	35666.11				
AIC	35639.69				

表5 . 気温と電力需要量のHockey-Stick 回帰モデルパラメータ推定

表 5 における t 統計量から判断すると、推定されたパラメーターは全て統計的に有意である。

次に、電力価格と電力需要量の関係を図 3 に示すと Hockey-Stick 型の関数形状が見られる。

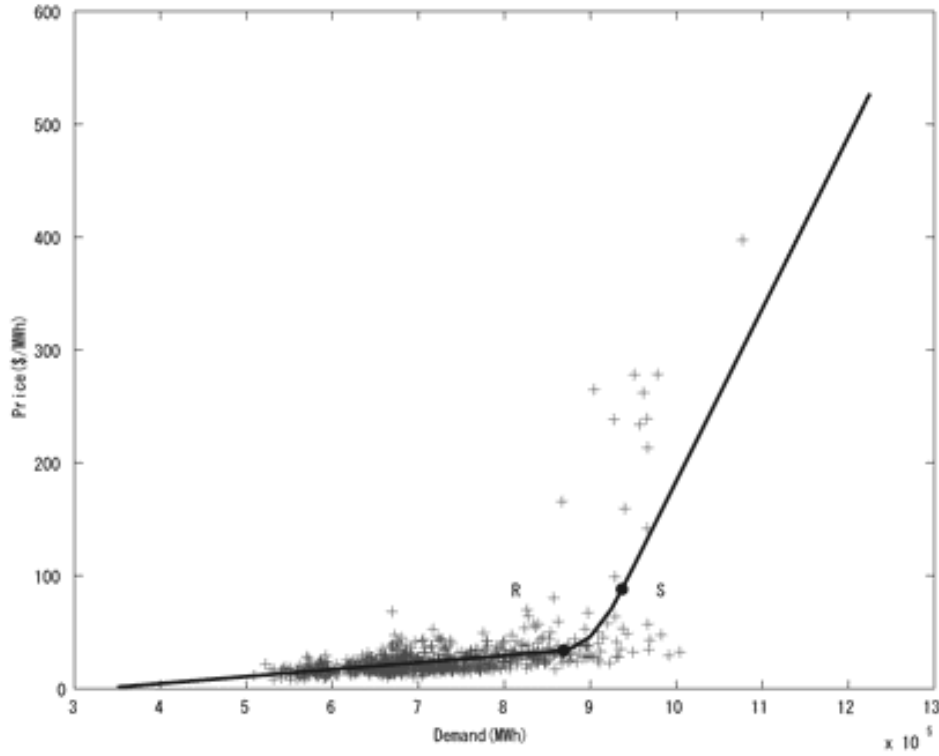


図3 . PJM 市場における電力需要量と価格

そこで、気温と電力需要量の回帰式を求めた場合と同様に、Hockey-Stick 回帰を用いる。これを式で表現すると

$$P_t = f(D_t) = \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 D_t + \varepsilon_t & (D_t \leq z_2 - s_2) \\ a_2 + b_2 D_t + c_2 D_t^2 + \varepsilon_t & (z_2 - s_2 < D_t < z_2 + s_2) \\ \gamma_2 + \delta_2 D_t + \varepsilon_t & (D_t \geq z_2 + s_2) \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= z_2 - s_2, & y_2 &= z_2 + s_2, & a_2 &= \alpha_2 + \beta_2 x_2 - b_2 x_2 - c_2 x_2^2 \\ b_2 &= \frac{y_2 \beta_2 - x_2 \delta_2}{y_2 - x_2}, & c_2 &= \frac{\delta_2 - b_2}{2y_2}, & \gamma_2 &= -\delta_2 y_2 + a_2 + b_2 y_2 + c_2 y_2^2 \end{aligned}$$

となる。ここで推定されるパラメーターは、電力需要量が低い領域において価格と需要量の関係を表現する傾きが緩やかな直線の切片 α_2 と傾き β_2 及び電力需要量が高い領域における傾きが急な直線の傾き δ_2 に加えて、両直線の境界を決定する z_2 ならびに両直線を繋ぐ二次関数の定義域の大きさを表す s_2 である。推定結果を表6に示す。³⁰全てのパラメーターの推定結果は t 統計量

³⁰ 推定に当って、1999年1月1日から2000年12月31日までのデータを用いる。2年とした理由は、データ期間が長いと電力市場の電源構成が変化する可能性が存在するからである。

から判断すると統計的にほぼ有意であると言える。

パラメータ	α_2	β_2	δ_2	l_2	s_2
推定値	-20.31	6.21×10^{-5}	1.53×10^{-3}	9.03×10^5	3.43×10^4
t 統計量	-2.68	5.77	10.06	124.55	1.89
対数尤度	-3292.03				
SIC	6617.03				
AIC	6594.06				

表6．電力需要量と価格のHockey-Stick 回帰モデルパラメータ推定

4．3 重み付き累積 CDD コールオプションの価格

本節では、以上の推定結果を用い、第4節で提案した電力価格と需要量の積のリスクヘッジに用いる重み付き累積 CDD コールオプションの価格付けを行う。コールオプションとした理由は、コストに相当する価格と需要量の積の増加に対してリスクヘッジを行うためである。式(16)および式(17)によって定式化した天候デリバティブ価格に関する偏微分方程式を用いて、30日間の累積 CDD を原資産とするヨーロッパ型コールオプション価格の価格範囲を求める。計算に当たっては、式(16)を株価(S)、気温の平年からの乖離(X)、重み付き累積 CDD(I)及び時間(t)について離散化し、有限差分法のうち陽解法を用いる。ここでは重み関数として、価格と需要量の積をヘッジするための式(34)を用いる。ヨーロッパ型コールオプションの境界条件は、 K をストライクとすると、満期 T において次式で与えられる。

$$\underline{C}(S, X, I, T) = \max(I_T - K, 0) \quad (40)$$

さらに、株価(S)、気温の平年からの乖離(X)、重み付き累積 CDD(I)について、計算領域の上・下限において関数の傾きがそれぞれ0となるノイマン条件を課す。

瞬間のリスクフリーレートを0.04%と仮定し、³¹表4で得られた推定結果を用いると、株式市場のリスクの市場価格 ϕ は 2.33×10^{-2} と計算される。そこで天候デリバティブが株式市場で取引開始されることによって、シャープレシオの最大値が株式市場のリスクの市場価格 ϕ の2倍もしくは3倍、すなわち 4.65×10^{-2} もしくは 6.98×10^{-2} となる場合を想定し、オプション価格を計算する。式(33)におけるCDDの基準気温を T_0 を表5の z_1 の推定値64.01(F)とし、オプションのストライク K を1500百万ドル、初期累積CDDを0とする。³²

³¹ 年率1%のリスクフリーレートは取引日数250日として日率0.04%となる。これを瞬間のリスクフリーレートと仮定する。

³² ストライク1500百万ドルは、例えば電力量が800,000MWhで価格が62.5/MWhの日が30日続いた場合のコストに相当する。

重み付き累積 CDD コールオプション価格の上・下限値およびゼロ天候リスクプレミアムの価格をそれぞれ図 4 に示す。ただし、このときの株価水準は1000ドルとする。図 4 より、シャープレシオの最大値が株式市場の 2 倍もしくは 3 倍であるとの仮定のもと、GDB のフレームワークを用い、初期気温を与えた場合の重み付き累積 CDD コールオプションの価格上・下限値を算出することができた。また、天候リスクの市場価格がゼロで天候リスクプレミアムがゼロとなる重み付き累積 CDD コールオプション価格も同時に算出できた。特に GDB を用いた利点として、価格上限値もしくは価格下限値とゼロ天候リスクプレミアム価格の差、すなわち図 4 における最上限・最下限のラインと中央のラインの差もしくは上から 2 番目の上限・下から 2 番目の下限と中央のラインの差として、シャープレシオが 3 倍および 2 倍となる天候リスクリスクプレミアムを算出することができた。例えば、初期気温を華氏67度としてシャープレシオの最大値が 2 倍であるとする。このとき、価格下限値、ゼロ天候リスクプレミアム価格、価格上限値はそれぞれ543,005 ドル、930,578ドルおよび1,549,399ドルであった。

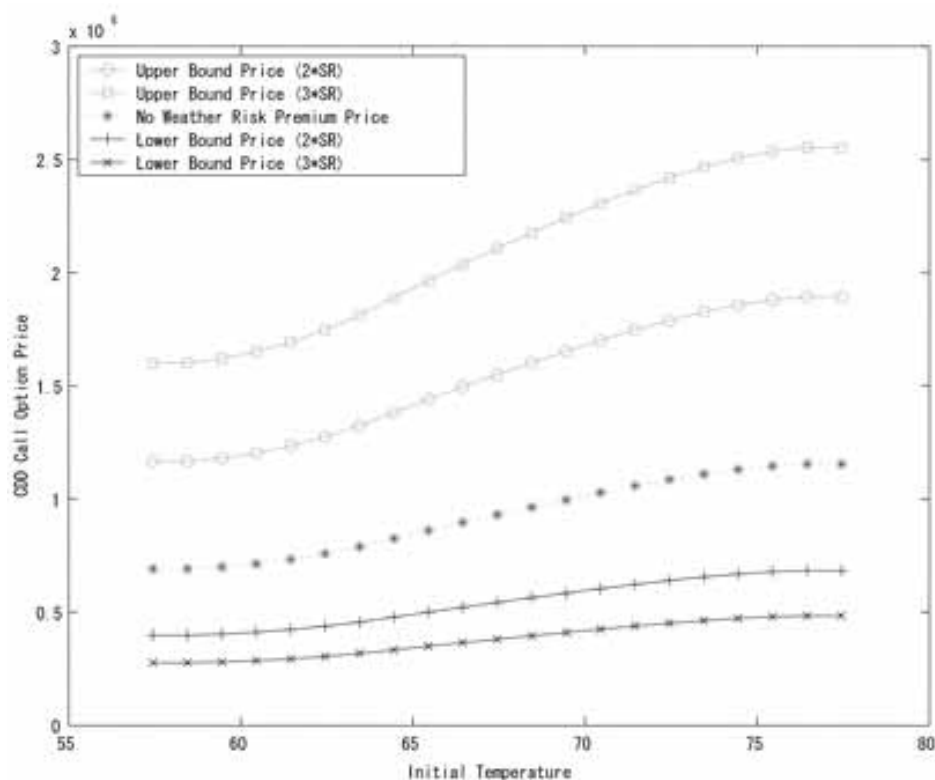


図 4 . 重み付き累積 CDD コールオプション価格

また、図 4 に示す全ての価格に共通な特徴として、重み付き累積 CDD コールオプション価格は初期気温が高いほどオプション価格が大きい。これは、初期気温が高いと重み付き累積 CDD がストライクを上回る確率が大きく、コールオプション価格が高くなる現象を反映したものである。例えば、初期気温が華氏57、67、77度と上昇するとゼロ天候リスクプレミアム価格はそれぞれ691,350ドル、930,578ドルおよび1,154,153ドルと上昇する。

5．結論と今後の課題

本論文では、天候デリバティブを用いた電力会社のリスク管理について検討を行った。まずはじめに、市場の不完備性が問題となる天候デリバティブのプライシングにおいて、Cochrane and Saa-Requejo(2000)が提案した GDB を応用し、デリバティブ価格の偏微分方程式を有限差分法で数値的に解き、天候デリバティブの価格付けを行った。天候デリバティブという新たなリスクにさらされる資産が株式市場に導入されると、シャープレシオは増大するが、市場全体のシャープレシオが無限大に大きくなるはずはない。そこでシャープレシオに最大値が存在するすると、これによって SDF の分散の大きさが制約される。この制約条件の範囲で天候デリバティブが取り得る価格の範囲を求める、というのが GDB のアイディアである。

実証的研究では、過去の東京の気温データおよび日経225のデータを用いて、気温および株価に関する確率過程のパラメーターを同時推定した後、パラメーター値を利用して、2種類の天候デリバティブの価格付けを行った。まずはじめに、天候デリバティブが株式市場に新たに導入されることで市場全体のリスクの市場価格がもとの2倍もしくは3倍になるとの設定のもと、6月の累積 CDD に関するヨーロッパ型コールオプション価格について、価格の上・下限値およびゼロ天候リスクプレミアム価格を算出した。この結果、累積 CDD コールオプション価格に関する天候リスクプレミアムを算出することが可能となった。加えて、同様のシャープレシオに関する条件のもと、6月の気温のうち25 以上の超過時間が5日を越えるとそれに応じてペイオフが支払われるヨーロッパ型コールオプション価格を、価格の上・下限値ならびにゼロ天候リスクプレミアム値として計算した。

次に、天候デリバティブを用いた電力会社のリスク管理について、電力市場から電力を調達し固定価格で消費者へ販売を行う電力会社が、コストに相当する価格と需要量の積の増加リスクを天候デリバティブによってヘッジする場合のリスク管理手法について議論した。相対契約のように天候デリバティブのポジションを変更できない場合を想定すると、通常の CDD オプションのような天候デリバティブのペイオフではボリュームリスクしかヘッジできない。そこで、CDD を供給曲線形状で変換することで、価格リスクも同時にヘッジできるペイオフを持つ新たな天候デリバティブを設計した。そして、米国での実際のデータをもとにモデルパラメーターを推定し、GDB を適用してコストに相当する電力価格と需要量の積の増加リスクをヘッジするための気温に基づくヨーロッパ型コールオプション価格を数値計算によって求めた。

今後の課題として、まず天候デリバティブについては、しばしば利用されるデйкаウントオプションの価格付けも考えてみたい。また、電力会社のリスク管理に関し、供給曲線は短期的に固定的と仮定したが、実際には原子力発電所の定期検査のような原因で変化する可能性がある。この点に関しても、今後の研究課題としたい。

補論 A . 気温モデルの検討

気温モデルは、Alaton, Djehiche, and Stillberger(2002)では、以下の確率過程で表現される。

$$dT_t = \left\{ \frac{d\bar{T}_t}{dt} + \lambda_X (\bar{T}_t - T_t) \right\} dt + \sigma_X d\nu_t \quad (A1)$$

$$\bar{T}_t = \kappa_1 + \kappa_2 t + \kappa_3 \sin(\omega t) + \kappa_4 \cos(\omega t) \quad (A2)$$

ただし、 $\omega = \frac{2\pi}{365}$ とする。ここで、気温 T_t は平均回帰過程に従い、その長期的平均は平年気温

$\bar{T}_t$ の関数で表現される。また、平年気温 $\bar{T}_t$ は三角関数で表現される季節的変動項と時間の一次関数で表現される長期的トレンド項の和で表現される。この連続時間モデルを $dt = 1$ で離散化したモデルについて検討する。まずはじめに、拡散項が一定の場合、次式となる。

$$T_{t+1} = \kappa_1 + \kappa_2 t + \kappa_3 \sin(\omega t) + \kappa_4 \cos(\omega t) + \alpha T_t + \sigma_X \varepsilon_t \quad (A3)$$

しかし、Alaton、Djehiche、and Stillberger(2002)でモデル化されているように、拡散項は一定ではなく、時間変動性を持っている。そこで不均一分散を持つモデルとして、以下の GARCH(1.1)モデルを検討する。

$$T_{t+1} = \kappa_1 + \kappa_2 t + \kappa_3 \sin(\omega t) + \kappa_4 \cos(\omega t) + \alpha T_t + \sigma_t \varepsilon_t \quad (A4)$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-1}^2 \quad (A5)$$

上記の GARCH モデルについて、東京の1961年1月1日から2000年12月31日までの日平均気温を用いて、モデルパラメーターを推定する。推定結果を表7に示す。

パラメータ	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	α	β_0	β_1	β_2
推定値	15.45	7.23×10^{-5}	-5.07	-9.48	6.74×10^{-1}	0.36	0.06	8.44×10^{-1}
t 統計量	0.10	1.14×10^{-5}	0.07	0.07	6.24×10^{-3}	0.05	0.01	1.59×10^{-2}
対数尤度	-30,390							
SIC	4.16							
AIC	4.17							

表7. 気温モデルのパラメータ推定

表7に示すパラメーター推定結果より、GARCH(1,1)モデルを用いた場合、 β_1 、 β_2 が統計的に有意な値であることから、気温の不均一分散効果を捉えることができた。またトレンド項を見ると、三角関数で表現される季節性の項に加え、時間と共に増加する地球温暖化等による長期的な気温のトレンドを統計的に有意な正の値(7.23×10^{-5})として捉えることができた。本論文で採用した気温モデルでは、デリバティブプライシングに主眼を置いたため、単純なAR(1)モデルを用いたが、ボラティリティーの不均一分散性および気温の長期的トレンド等をモデルに組入れることが課題として挙げられる。

補論B．命題1の証明

累積CDDもしくは超過時間を表すインデックス I の関数としてペイオフが表現される天候デリバティブの価格下限値を $\underline{C}(\underline{S}, X, I, t)$ とする。Cochrane and Saa-Requejo(2000)の手法に基づいて、第2.1節で定式化した最小値問題から、この解を数値的に算出するための偏微分方程式を提示する。ここで下限値は $\underline{S}$, X , t のみならず、ペイオフを構成する累積CDDもしくは超過時間に関するインデックス I を変数に持つことに注意する。Cochrane and Saa-Requejo(2000)に従い、 $\underline{C}(\underline{S}, X, I, t)$ は以下の確率微分方程式に従うと仮定する。

$$\frac{d\underline{C}}{\underline{C}} = \mu_{\underline{C}} dt + \sigma_{\underline{C}_w} dw + \sigma_{\underline{C}_2} dz$$

$\underline{C}(\underline{S}, X, I, t)$ について伊藤の公式を用いると、

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{C}} &= \frac{1}{\underline{C}} \left\{ \frac{\partial \underline{C}}{\partial t} + \mu_s \underline{S} \frac{\partial \underline{C}}{\partial \underline{S}} - \mu_X X \frac{\partial \underline{C}}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 \underline{S}^2 \frac{\partial^2 \underline{C}}{\partial \underline{S}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma_X^2 \frac{\partial^2 \underline{C}}{\partial X^2} + \rho \sigma_s \sigma_X \underline{S} \frac{\partial^2 \underline{C}}{\partial X \partial \underline{S}} + \max(X + \bar{T} - T_B, 0) \frac{\partial \underline{C}}{\partial I} \right\} \\ \sigma_{\underline{C}_w} &= \frac{1}{\underline{C}} \left\{ \mu_s \underline{S} \frac{\partial \underline{C}}{\partial \underline{S}} + \rho \sigma_X \frac{\partial \underline{C}}{\partial X} \right\} \\ \sigma_{\underline{C}_2} &= \frac{1}{\underline{C}} \left\{ \sigma_X \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial \underline{C}}{\partial X} \right\} \end{aligned}$$

となる。 $x^c = 0$ であることに注意し、これらの係数を Cochrane and Saa-Requejo(2000)の式(35)に代入すると、式(16)を得る。||

参考文献

- Alaton, P., B. Djehiche, and D. Stillberger, 2002, On Modelling and Pricing Weather Derivatives, *Applied Mathematical Finance* 9, 1-20.
- Cao, M., and J. Wei, 2000, Equilibrium Valuation of Weather Derivatives, Working paper, University of Toronto.
- Cochrane, J. H., 2001, *Asset Pricing*. (Princeton University Press New Jersey).
- Cochrane, J. H., and J. Saa-Requejo, 2000, Beyond Arbitrage: Good-Deal Asset Price Bounds in Incomplete Markets, *Journal of Political Economy* 108, 79-119.
- Davis, M., 2001, Pricing weather derivatives by marginal value, *Quantitative Finance* 1, 1-4.
- Hansen, L. P., and R. Jagannathan, 1991, Implications of Security Markets Data for Models of Dynamic Economics, *Journal of Political Economy* 99, 225-262.
- Ingersoll, J. E. Jr., 1987. *Theory of Financial Decision Making*. (Rawman & Littlefield Publishers Maryland).
- Kanamura, T., and K. Ohashi, 2006, A Structural Model for Electricity Prices with Spikes; Measurement of Jump Risk and Optimal Policies for Hydropower Plant Operation, *Energy Economics* (forthcoming).
- Lettau, M., and H. Uhlig, 2002, The Sharpe Ratio and Preferences: A Parametric Approach, *Macroeconomic Dynamics* 6, 242-265.
- Lucas, R. E., 1978, Asset Prices in an Exchange Economy, *Econometrica* 46, 1429-1445.