

- 1．はじめに
- 2．ボラティリティの定式化
  - 2.1 ARCHモデル
  - 2.2 GARCHモデル
  - 2.3 ボラティリティ変動の非対称性
- 3．データ
- 4．基本統計量
- 5．実証結果
- 6．結 論

## 1．はじめに

先物市場は、江戸時代の堂島米会所を起源とし、時代とともに変遷を遂げてきた。特に、近年の通信手段の発達とともに、先物市場における売買方法の進展にはめざましいものがある。現代経済において先物市場は、公正な価格の形成、リスクヘッジの手段として利用され、市場経済にとって不可欠なものとなっている。今日では、先物市場の中心的な機能が、価格形成機能およびリスク分散機能にあることは広く認められている。というのは、先物市場は、市場メカニズムが高度に発展した組織化した市場であり、完全競争に近い状態が成り立っているからである。したがって、そこで形成される価格は公正であり、現物価格決定の基準としても利用される。また、価格変動に伴うリスクに関しては、先物取引を行うことにより広く危険を分散することが可能であり、先物取引は、価格保険の役割を果たすものとなっている<sup>2)</sup>。このように、先物取引の重要性が強調されるとともに、さまざまな商品の開発もあって、その市場規模は急速に拡大してきている。

そこで本稿では、日米の代表的な商品先物市場を対象に、その収益率のボラティリティ (volatility) について、実証的に検証を行う。そのことを通して、商品先物市場の価格付けに関して、日米間でどのような相違が見出されるのか比較検討を行う。

ボラティリティは、商品市場を始めとする全ての資産運用を行うに際して重要な情報であ

---

<sup>1)</sup> 本稿で用いたデータの収集に際して、関西商品取引所のご協力を得たことに感謝いたします。

<sup>2)</sup> 三和総合研究所 (1997) 参照。

る。簡単化のために、収益率 (  $r$  ) を次のようにモデル化する。

$$(1) \quad r_t = x_t \mathbf{p} + e_t$$

ただし、 $x_t$  は説明変数のベクトル、 $\mathbf{p}$  はパラメーター、 $e_t$  は誤差項である。

(1)式より、

$$(2) \quad E_{t-1}(r_t) = x_t \mathbf{p}$$

となるので、(1)式から(2)式を引いて両辺を自乗すると、

$$(3) \quad \{r_t - E_{t-1}(r_t)\}^2 = e_t^2$$

が得られる。(3)式より、 $e_t^2$  は 1 期先の  $r_t$  を予測した際の予測誤差  $r_t - E_{t-1}(r_t)$  の自乗の値に等しいことが理解できる。

ここで、

$$(4) \quad \text{Var}_{t-1}(r_t) = E_{t-1}\{(r_t - E_{t-1}(r_t))^2\} = E_{t-1}(e_t^2)$$

となることから明らかなように、予測誤差  $e_t$  の自乗の期待値は、収益率の条件付き分散  $\text{Var}_{t-1}(r_t)$  に等しい。t 期の収益率のボラティリティとは、この t 期の収益率の条件付き分散  $\text{Var}_{t-1}(r_t)$  をさす。以下では、この値を  $s_t^2$  表す。

ボラティリティの値は、その資産のリスクを表している。なぜならば、この値が大きいほど収益率の将来予測が大きくはずれる可能性が高いことを意味し、リスクが高いと言えるからである。多くの投資家は、収益率の期待値が同じであれば、よりリスクが小さい資産を選択するであろう。そのように投資家が危険回避的な行動をとる場合には、ボラティリティの値は、ポートフォリオの選択を行う際に重要な情報となる。

## 2 . ボラティリティの定式化<sup>3)</sup>

本節では、渡部 ( 1997 ) に基づき、ARCH、GARCH、およびGJRの 3 つのモデルにつき、簡単に特徴をまとめる。

---

<sup>3)</sup> また、Bollerslev, Chou and Kroner (1992), Bollerslev, Engle and Nelson (1994), Shephard (1996) 等も参照のこと。

## 2.1 ARCHモデル

いま、 $e_t^2$  がAR (q)モデル

$$(5) \quad e_t^2 = w + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2 + \dots + a_q e_{t-q}^2 + h_t$$

に従っているものとする。このとき、

$$(6) \quad E_{t-1}(e_t^2) = w + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2 + \dots + a_q e_{t-q}^2$$

が成立する。ここで、 $E_{t-1}(e_t^2)$  をボラティリティ ( $s_t^2$ ) に置き換えると

$$(7) \quad s_t^2 = w + a_1 e_{t-1}^2 + a_2 e_{t-2}^2 + \dots + a_q e_{t-q}^2$$

を得る。

さらに、 $z_t$  を平均が0、分散が1で、自己相関のない確率変数とすると、 $e_t$  は、次のように  $s_t$  と  $z_t$  との積として表すことができる<sup>4)</sup>。

$$(8) \quad e_t = s_t z_t, \quad s_t > 0, \quad E(z_t) = 0, \quad \text{Var}(z_t) = 1.$$

Engle (1982) は、(7)式と(8)式から成るモデルを提案し、次数qのAutoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH (q)) モデルと呼んだ。

## 2.2 GARCHモデル

ボラティリティの説明変数に、過去の予測誤差の自乗だけでなく、過去のボラティリティの値を加えたモデルが、Bollerslev (1986) によって提案された。例えば、GARCH (1,1) モデルは、次のように定式化される。

$$(9) \quad s_t^2 = w + a e_{t-1}^2 + b s_{t-1}^2$$

(9)式から明らかなように、このモデルは、ARCHモデルを一般化したものであるので、generalized ARCH (GARCH) モデルと呼ばれる。

(9)式は、

$$(10) \quad (1 - bL)s_t^2 = w + a e_{t-1}^2$$

---

<sup>4)</sup> ここで  $\text{Var}_{t-1}(r_t) = E_{t-1}\{(r_t - E_{t-1}(r_t))^2\} = E_{t-1}(e_t^2) = s_t^2 E_{t-1}(z_t^2) = s_t^2$  となることに注意。

となる。ただし、 $L$  はラグ演算子である。  $|b| < 1$  であれば、(10)式より、

$$(11) \quad s_t^2 = \frac{1}{1-bL}(w + ae_{t-1}^2) = \frac{w}{1-b} + a \sum_{i=0}^{\infty} b^i e_{t-1-i}^2$$

が得られる。(11)式は、次数が無限大のARCHモデルである。すなわち、(9)式で示される GARCH (1,1) モデルは、次数無限大のARCHモデルに対応している。その結果、ARCHモデルとGARCHモデルの双方を用いて収益率の変動を分析した場合には、ARCHモデルで長い次数が選ばれたとしても、GARCHモデルにおいては簡単なGARCH (1,1) モデルが選ばれることが多い。このように、推定するパラメーターの数が少なくてもよいために、GARCHモデルは実証研究において極めてポピュラーなモデルとなっている。

(9)式から明らかなように、ボラティリティ  $s_t^2$  は、 $e_t^2$  の条件付期待値である。ボラティリティの予測誤差  $e_t^2 - E_{t-1}(e_t^2)$  を  $h_t$  で表すと、

$$(12) \quad e_t^2 = s_t^2 + h_t$$

となる。(12)式の関係性を1期ずらすと、

$$(13) \quad e_{t-1}^2 = s_{t-1}^2 + h_{t-1}$$

を得、(13)式を(9)式に代入すると

$$(14) \quad s_t^2 = w + (a + b)s_{t-1}^2 + ah_{t-1}$$

となる。(14)式は、 $\{s_t^2\}$  に関するAR(1)モデルである。

(14)式において、 $h_t = s_t^2 - w/(1-a-b)$  とおくと、

$$(15) \quad h_t = (a + b)h_{t-1} + h_{t-1}$$

と書き換えることができる。(15)式より、ボラティリティのショック ( $h_t$ ) の  $h_t$  への影響は、 $a + b$  の大きさによって把握することができる。もし  $|a + b| < 1$  であれば、時間の経過とともに、 $h_t$  は0へと収束する。これは、 $s_t^2$  がその定常値である  $w/(1-a-b)$  に収束することを意味している。この値が1に近いほど、ボラティリティのショックに対する影響が長期間持続することとなる。

### 2.3 ボラティリティ変動の非対称性

ARCHモデルおよびそれを一般化したGARCHモデルは、収益率のボラティリティの変

動を表すモデルとして優れたモデルであることは言うまでもないが、欠点も併せ持っている。収益率のボラティリティは、資産価値が上がったという良いニュースのあった次の期よりも資産価値が下がったという悪いニュースのあった次の期においてより上昇する傾向があることが経験的に知られており、こうしたボラティリティの非対称性はGARCHモデルやGARCHモデルでは捉えることができない。そこで、こうしたボラティリティ変動の非対称性を取り入れたモデルが登場した。そのようなモデルの代表的なものの一つが、Glosten, Jagannathan, and Runkle (1993) によるモデル (GJRモデル) である<sup>5)</sup>。

GJRモデルは、ダミー変数

$$(16) \quad D_{t-1} = \begin{cases} 1, & \text{if } e_{t-1} < 0 \\ 0, & \text{if } e_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

を用いることによって、ボラティリティ変動の非対称性を捉えようとするものである。例えば、GJR (1,1) モデルは、ボラティリティ変動を次のように定式化する。

$$(17) \quad s_t^2 = w + ae_{t-1}^2 + gD_{t-1}e_{t-1}^2 + bs_{t-1}^2$$

悪いニュース ( $e_{t-1} < 0$ ) であれば、 $D_{t-1} = 1$  なので、(17)式は、

$$(18) \quad s_t^2 = w + (a + g)e_{t-1}^2 + bs_{t-1}^2$$

となる。これに対して、良いニュース ( $e_{t-1} > 0$ ) であれば、 $D_{t-1} = 0$  なので、(16)式は

$$(19) \quad s_t^2 = w + ae_{t-1}^2 + bs_{t-1}^2$$

となる。 $g > 0$  であれば、レバレッジ効果が存在する。つまり、予期せず価格が上がった日の翌日より予期せず価格が下がった日の翌日の方が、ボラティリティはより上昇することになる。

### 3. データ

本稿では、分析の対象として1993年1月4日から1996年7月31日の日次データを用いた。分析の対象となる商品先物は、

- 東京穀物商品取引所のとうもろこし、
- シカゴ商品取引所のとうもろこし、

---

<sup>5)</sup> これ以外に Nelson (1991) による Exponential GARCH (EGARCH) モデルもある。

東京穀物商品取引所の大豆、  
シカゴ商品取引所の大豆、

の4種類である。これらは、とうもろこしおよび大豆の各銘柄のシカゴと東京での価格である。これらのデータを用いることにより、商品先物の価格付けが日米においてどのように異なるのか、検証を行うことが可能となる。なお、各先物価格に関しては、2番限の価格を採用した。

#### 4．基本統計量

まず、各銘柄の先物価格の収益率（％）を計算し、それぞれの基本統計量を計算した。結果は、表1に示されている。表1では、各指数の平均、最大値、最小値、標準偏差、歪度、尖度、Jarque-Bera統計量、およびその確率値が示されている。

この表より、大豆の収益率に関しては、シカゴ市場のほうが東京市場よりも平均値が高く、標準偏差が小さいことがわかる。逆に、とうもろこしの収益率に関しては、東京市場のほうがシカゴ市場よりも、平均値が高く標準偏差が小さいことがわかる。また、全ての収益率について、Jarque-Bera統計量とその確率値より、正規分布の仮説が棄却されることが明らかである。

表1 基本統計量：各変数の日次収益率（％）

	シカゴ商品取引所		東京穀物商品取引所	
	大豆	とうもろこし	大豆	とうもろこし
平均	0.023	0.039	0.012	0.043
メディアン	0.043	0.052	0.000	0.000
最大値	6.182	6.106	9.190	5.743
最小値	-6.198	-20.300	-8.960	-6.571
標準偏差	1.376	1.639	1.497	1.394
歪度	-0.112	-2.266	-0.314	-0.147
尖度	5.114	31.640	7.715	4.494
Jarque-Bera	157.368	29288.090	788.177	80.800
確率値	0.000	0.000	0.000	0.000
標本数	836	836	836	836

図1から図4は、各収益率の動きを示したものである。

图1 東京市場：大豆

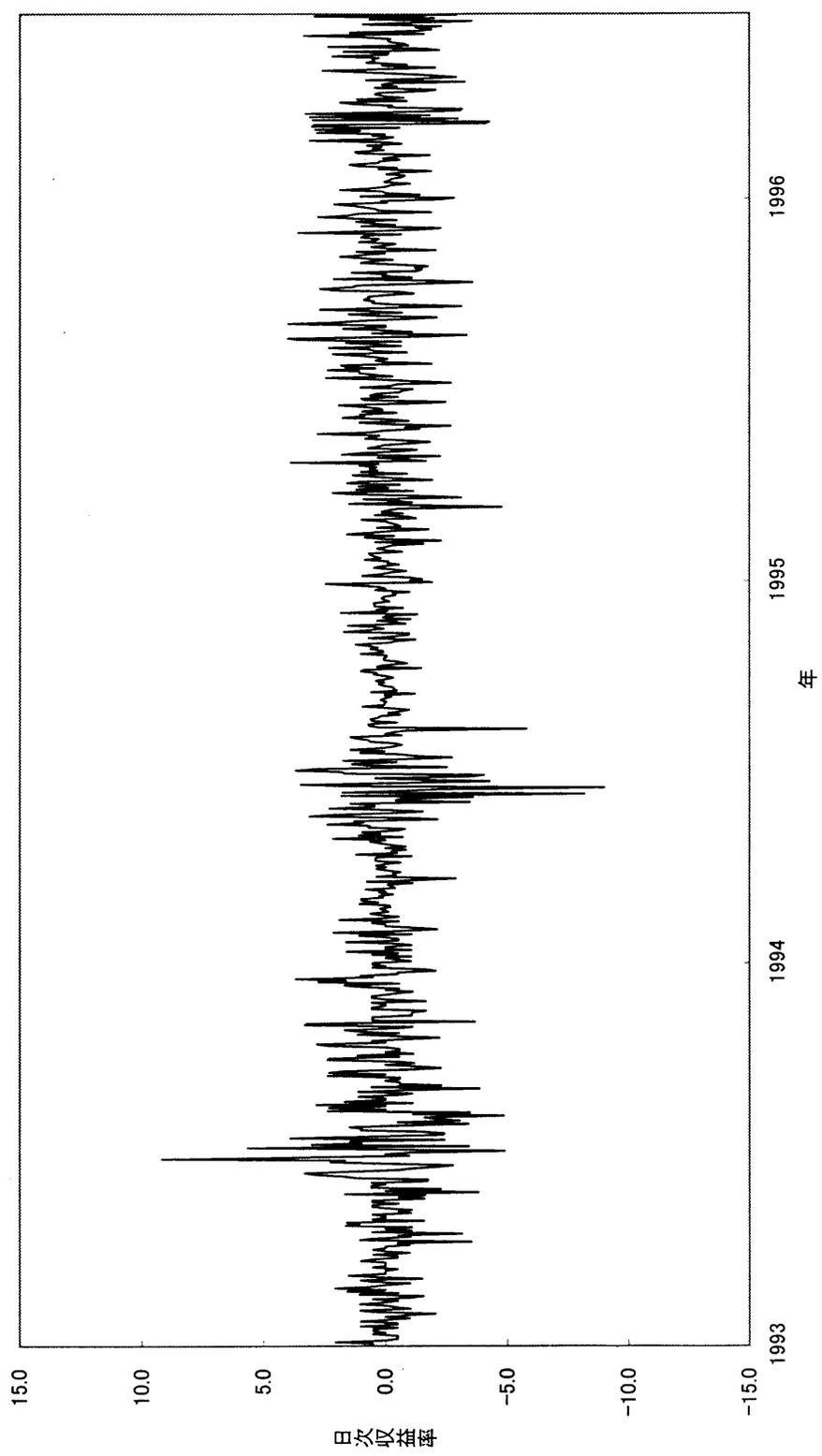


図2 東京市場：とうもろこし

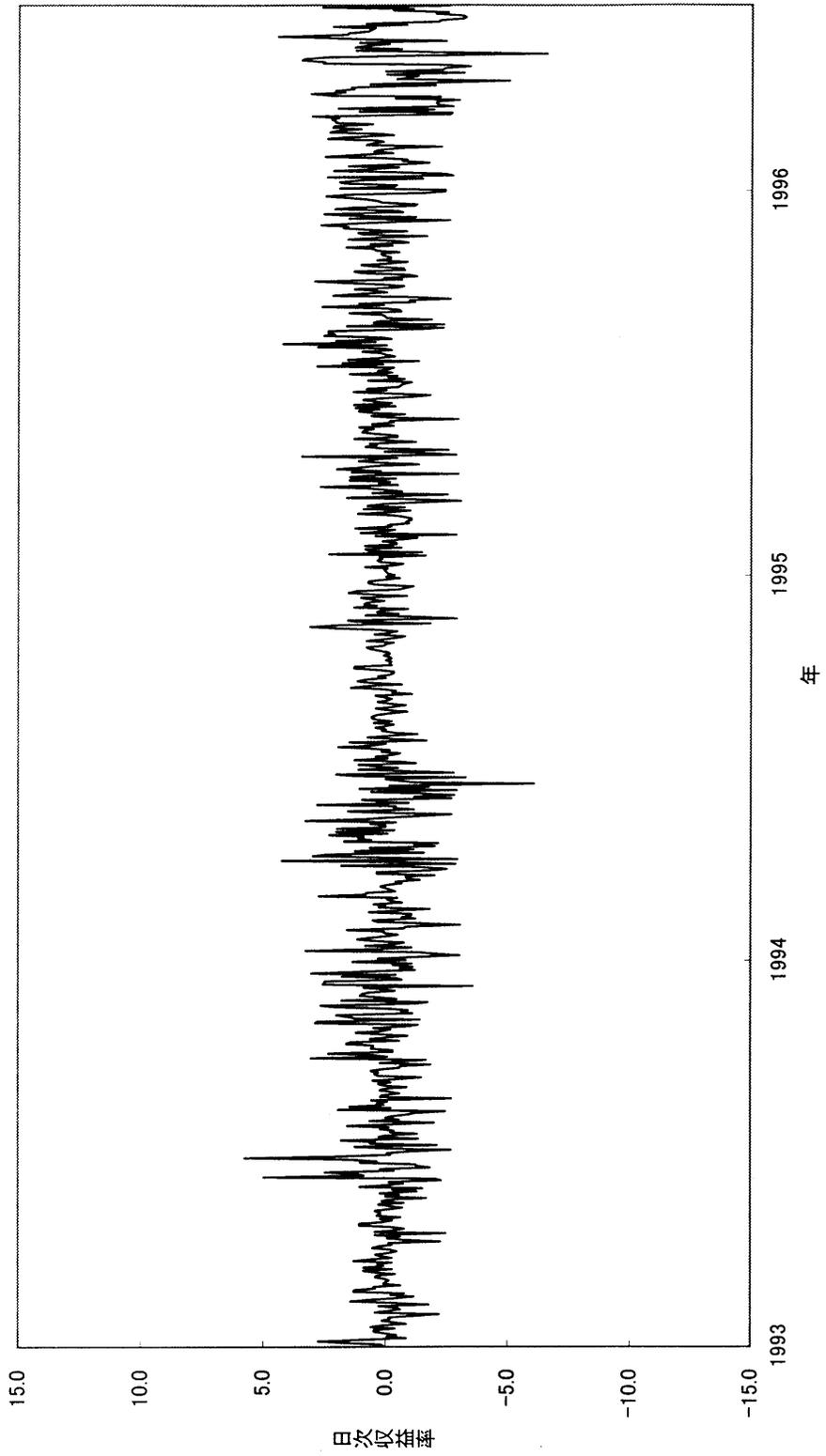


図3 シカゴ市場：大豆

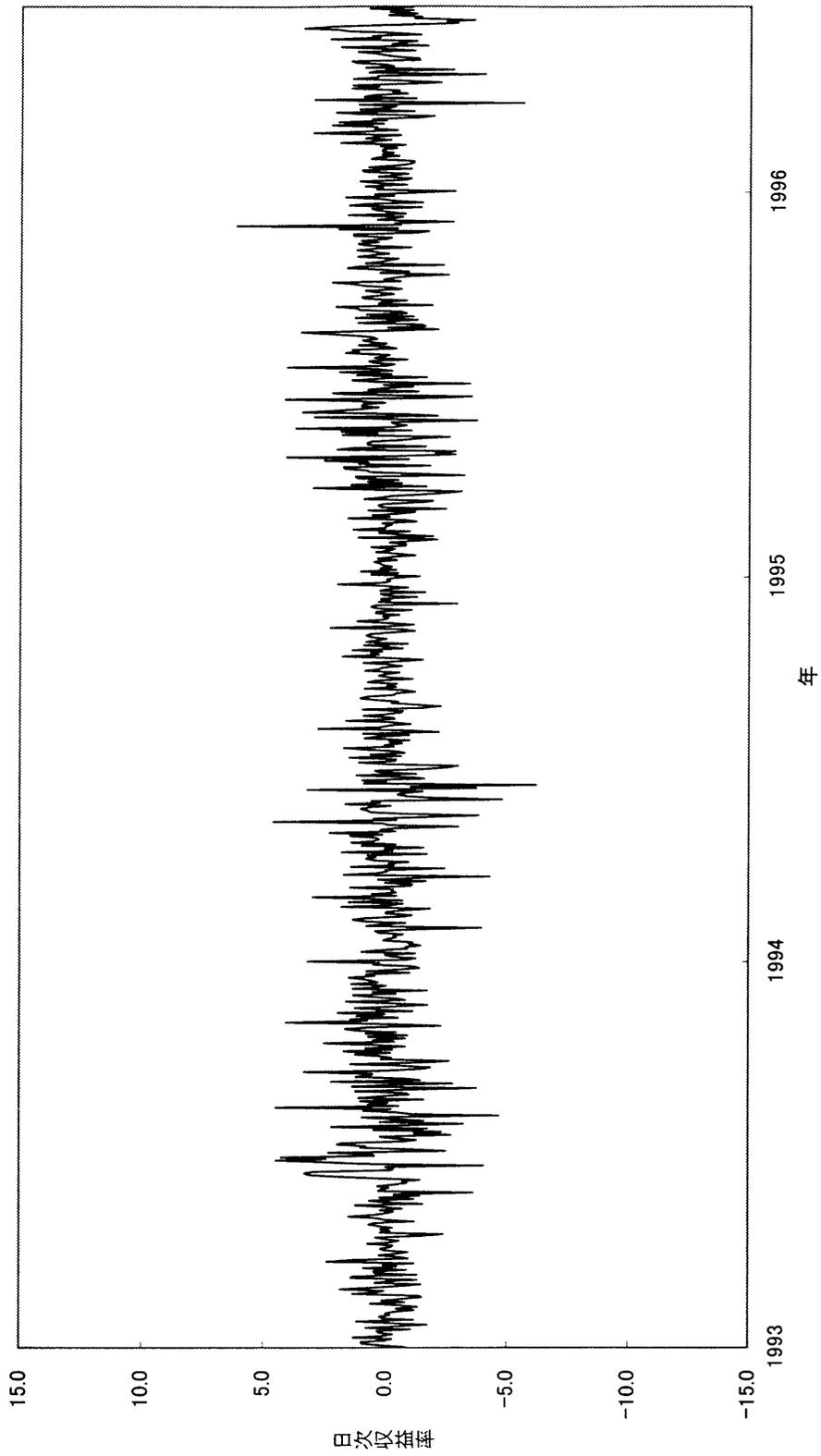


図4 シカゴ市場：とうもろこし

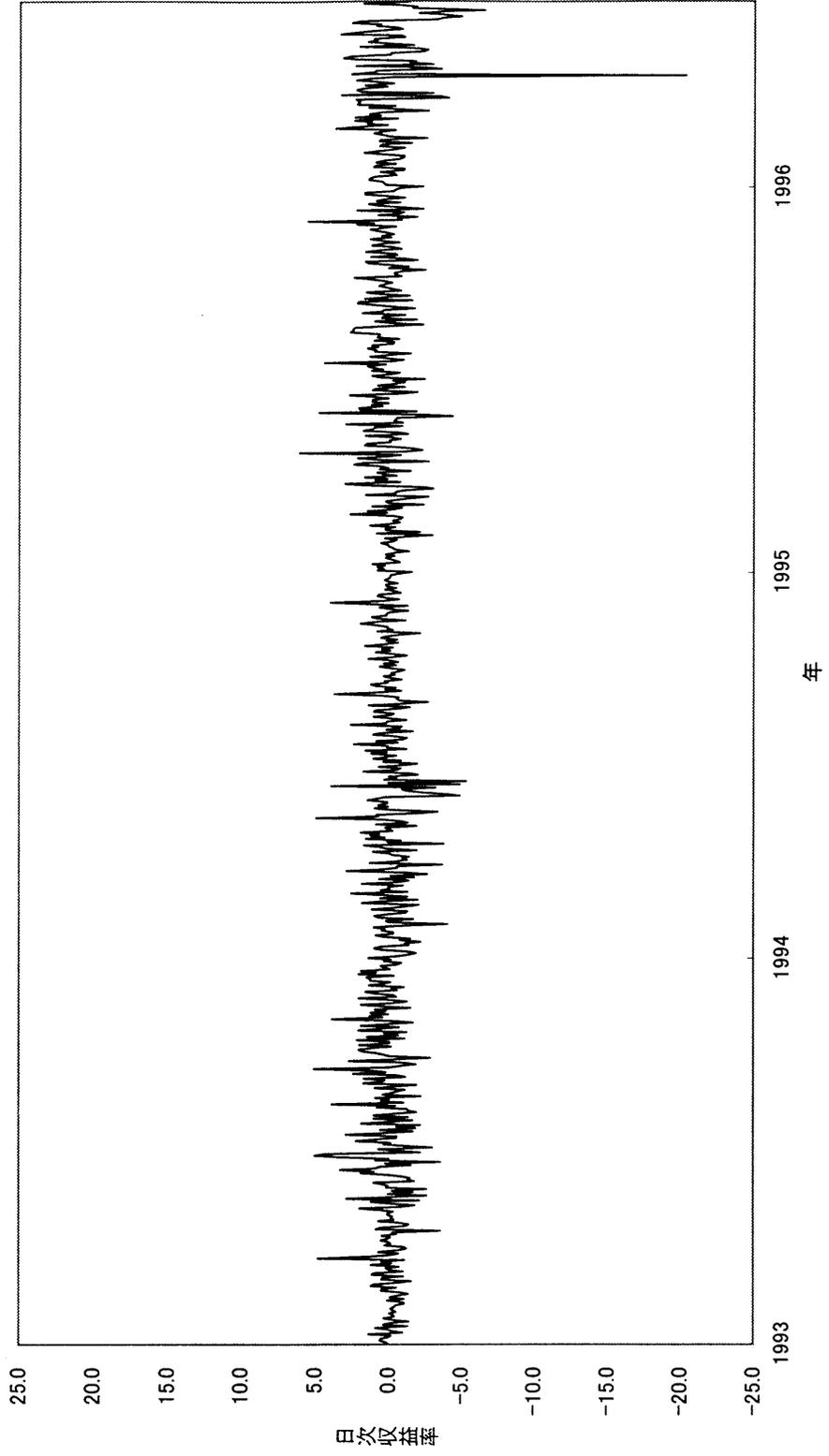


表 2 は、各日次収益率の自己相関を示している。

表 2 各収益率の自己相関

	シカゴ商品取引所		東京穀物商品取引所	
	大豆	とうもろこし	大豆	とうもろこし
1 期	0.038	0.071	0.076	0.170
2 期	-0.020	-0.003	0.000	0.063
3 期	0.010	0.011	-0.011	0.064
4 期	-0.035	0.033	-0.006	-0.028
5 期	-0.058	-0.012	-0.124	-0.074
6 期	0.031	-0.028	-0.015	-0.001
7 期	0.046	0.060	0.056	0.079
8 期	0.020	-0.002	0.009	0.022
9 期	0.101	0.068	0.061	0.002
10 期	0.019	-0.025	0.070	0.040

表 3 a 及び 3 b は、それぞれ、各収益率に関する単位根検定の結果を示したものである。ここでは、2つの単位根検定法を採用した。第 1 は、Dickey and Fuller (1979、1981) によって提示された ADF (augmented Dickey-Fuller) 検定であり、第 2 は Phillips and Perron (1988) によって提示された Phillips-Perron 検定である。それぞれの回帰式の定式化としては、定数項を含む場合と含まない場合の 2 種類を分析の対象とした。さらに、分析結果の頑健性をみるために、ADF 検定のラグ次数には、1 次と 3 次を用い、Phillips-Perron 検定の kernel についても、1 次と 3 次を用いて分析を行った。したがって、具体的には次の定式化を用いたことになる。

ADF 検定：

$$(20) \quad \Delta r_t = a + br_{t-1} + \sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i \Delta r_{t-i} + u_t, \quad p = 1 \text{ or } 3 \quad (\text{定数項を含む場合})$$

$$(21) \quad \Delta r_t = br_{t-1} + \sum_{i=1}^p \hat{\mathbf{a}} \Delta r_{t-i} + u_t, \quad p = 1 \text{ or } 3 \quad (\text{定数項を含まない場合})$$

ただし、 $u_t$  は次の性質を満たす攪乱項である。

$$E(u_t) = 0,$$

$$E(u_t u_s) = \begin{cases} \hat{\mathbf{1}} \mathbf{s}^2 & \text{for } s = t \\ \hat{\mathbf{1}} \mathbf{0} & \text{その他} \end{cases}$$

帰無仮説と対立仮説は、以下のようになる。

$$H_0 : b = 0$$

$$H_A : b < 0.$$

つまり、帰無仮説は「単位根を持つ」であり、対立仮説は「単位根を持たない」である。したがって、通常の t 値を計算し、経験分布表に基づいて仮説検定を行えばよい。

Phillips-Perron検定：

$$(22) \quad \Delta r_t = a + br_{t-1} + n_t \quad (\text{定数項を含む場合})$$

$$(23) \quad \Delta r_t = br_{t-1} + n_t, \quad (\text{定数項を含まない場合})$$

ただし、 $V_t$  は次の性質を満たす攪乱項である。

$$E(V_t) = 0,$$

$$E(V_t^2) = \mathbf{s}^2$$

ADF検定の場合と異なり、系列相関はあっても構わない。この場合にも、帰無仮説と対立仮説とは、それぞれ、次のようになる。

$$H_0 : b = 0$$

$$H_A : b < 0.$$

つまり、帰無仮説は「単位根を持つ」であり、対立仮説は「単位根を持たない」である。ADF検定の場合には、回帰式の説明変数に過去の差分項を導入することにより系列相関の問題に対処する。Phillips-Perron検定の場合には、検定統計量の計算において、次のような修正を行うことにより対処する。まず、

$$w^2 = g_0 + 2 \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{c_j} - \frac{j}{q+1} g_j, \quad g_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T n_t n_{t-j}, \quad q=1 \text{ or } 3$$

とし、検定統計量 ( $t_{pp}$ ) を次のように計算する。

$$t_{pp} = \frac{t \sqrt{g_0}}{w} - \frac{(w^2 - g_0)Ts}{2ws}$$

ただし、 $t$  と  $s$  とは、それぞれ、 $b$  の  $t$  値と標準誤差であり、 $\frac{1}{s}$  は回帰の標準誤差である。また  $T$  は標本数である。

表 3 a それぞれ表 3 b は、それぞれ、ADF検定とPhillips-Perron検定の結果を示している。これらの表から明らかなように、いずれの検定を用いても、「各収益率が単位根を持つ」という帰無仮説は、棄却されることが明らかである。

表 3 a 各収益率に関する単位根検定の結果：ADF検定

定数項	Augment項 の次数	検 定 統 計 量			
		シカゴ商品取引所		東京穀物商品取引所	
		大 豆	とうもろこし	大 豆	とうもろこし
無し	1	-20.441**	-19.805**	-19.694**	-17.911**
	3	-14.797**	-13.595**	-14.324**	-13.628**
有り	1	-20.438**	-19.808**	-19.683**	-17.919**
	3	-14.797**	-13.602**	-14.316**	-13.635**

注) \*\*) 帰無仮説を有意水準1%で棄却

表 3 b 各収益率に関する単位根検定の結果：Phillips-Perron検定

定数項	Kernelの 次数	検 定 統 計 量			
		シカゴ商品取引所		東京穀物商品取引所	
		大 豆	とうもろこし	大 豆	とうもろこし
無し	1	-27.802**	-26.863**	-26.690**	-24.229**
	3	-27.795**	-26.859**	-26.678**	-24.347**
有り	1	-27.794**	-26.861**	-26.675**	-24.233**
	3	-27.786**	-26.856**	-26.663**	-24.351**

注) \*\*) 帰無仮説を有意水準1%で棄却

## 5 . 実証結果

GARCHモデルの実証結果が表4に示されている。ここでは2つの定式化を行った。

(Model 1)

$$\text{平均} : r_t = \mu_0$$

$$\text{条件付き分散} : s_t^2 = w_0 + a e_{t-1}^2 + b s_{t-1}^2$$

(Model 2)

$$\text{平均} : r_t = \mu_0 + \rho_1 r_{t-1}$$

$$\text{条件付き分散} : s_t^2 = w_0 + a e_{t-1}^2 + b s_{t-1}^2$$

Model 1は単純なケースであり、平均には、単に定数項のみを含み、条件付き分散にはGARCH (1,1) モデルを仮定している。Model 2はModel 1の平均に前期の収益率の影響を考慮したモデルである。

まず、シカゴ市場での結果からみてみよう。シカゴ市場においては、 $\mu_0$  及び  $\rho_1$  の推定値についてみてみると、推定値の標準誤差は比較的小さく、GARCHモデルにおいて中心的な役割を果たすパラメーターの推定結果が良好なものとなっていることがわかる。次に、ボラティリティに対するショックの持続性についてみてみよう。先に述べたように、GARCH (1,1) モデルではボラティリティのショックの持続性は、 $\rho_1 + a$  で測ることができる。そこで、 $\rho_1$  の推定値と  $a$  の推定値の和を計算すると、0.976~0.998となることがわかる。また、残差項の正規性を検定するJarque-Bera検定とその確率値より明らかなように、正規分布の仮説は棄却されることが明らかである。これは、GARCH効果を支持する結果となっている。

次に、東京市場の結果をみてみると、シカゴ市場の場合と同様の結果が得られていることが分かる。 $\mu_0$  及び  $\rho_1$  の推定値については、推定値の標準誤差は比較的小さく、GARCHモデルにおいて中心的な役割を果たすパラメーターの推定結果が良好なものとなっていることがわかる。次に、ボラティリティに対するショックの持続性については、 $\rho_1$  の推定値と  $a$  の推定値の和を計算すると、0.968~0.974となる。また、残差項の正規性を検定するJarque-Bera検定とその確率値より明らかなように、正規分布の仮説は棄却されることが明らかである。これは、GARCH効果を支持する結果となっている。

表4 GARCHモデルの実証結果

(Model 1) 平均 :  $r_t = \mu_0$   
 条件付き分散 :  $s_t^2 = w_0 + ae_{t-1}^2 + bs_{t-1}^2$

(Model 2) 平均 :  $r_t = \mu_0 + \mu_1 r_{t-1}$   
 条件付き分散 :  $s_t^2 = w_0 + ae_{t-1}^2 + bs_{t-1}^2$

	シカゴ商品取引所				東京穀物商品取引所			
	大豆		とうもろこし		大豆		とうもろこし	
	Model 1	Model 2						
$\pi_0$	0.001 (0.045)	0.008 (0.042)	0.021 (0.062)	0.018 (0.061)	0.027 (0.038)	0.024 (0.038)	0.055 (0.039)	0.052 (0.040)
$\pi_1$		0.027 (0.034)		0.075* (0.037)		0.085* (0.039)		0.129** (0.039)
$\omega_0$	0.048* (0.024)	0.049* (0.023)	0.035 (0.027)	0.034 (0.029)	0.075* (0.037)	0.082* (0.038)	0.063* (0.030)	0.063* (0.030)
$\alpha$	0.053** (0.017)	0.053** (0.017)	0.063* (0.031)	0.065* (0.031)	0.109** (0.039)	0.114** (0.039)	0.128** (0.030)	0.133** (0.032)
$\beta$	0.923** (0.023)	0.923** (0.023)	0.934** (0.014)	0.933** (0.014)	0.863** (0.046)	0.854** (0.046)	0.846** (0.039)	0.841** (0.040)
$\alpha + \beta$	0.976	0.976	0.997	0.998	0.972	0.968	0.974	0.974
対数尤度	-1424.21	-1422.48	-1539.66	-1537.77	-1442.01	-1438.60	-1393.96	-1386.97
BIC	3.439	3.447	3.716	3.724	3.482	3.486	3.367	3.362
JB	126.668	123.205	7398.117	7345.779	297.607	304.297	42.141	44.072
P-value	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

注) \*\*は係数が有意水準1%で有意であることを示している。  
 \*は係数が有意水準5%で有意であることを示している。  
 JBは残差項の正規性を検定するためのJarque-Bera検定統計量。  
 P-valueはJarque-Bera検定統計量に基づく確率値。  
 ( )内の数字はHeteroskedasticity Consistent Standard Error。  
 BICはモデル選択に関するSchwarz基準である。

次に、表5に基づき、前期に価格が上がったか下がったかによるボラティリティ変動の非対称性について試みることにしよう。ここでも、次の2つの定式化を行った。

(Model 3)  
 平均 :  $r_t = \mu_0$   
 条件付き分散 :  $s_t^2 = w_0 + ae_{t-1}^2 + gD_{t-1}e_{t-1}^2 + bs_{t-1}^2$

(Model 4)

$$\begin{aligned} \text{平均} &: r_t = p_0 + p_1 r_{t-1} \\ \text{条件付き分散} &: s_t^2 = w_0 + a e_{t-1}^2 + g D_{t-1} e_{t-1}^2 + b s_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Model 3は単純なケースであり、平均には、定数項のみを含み、条件付き分散にはGARCH (1, 1) モデルを仮定している。Model 4はModel 3の平均に前期の収益率の影響を考慮したモデルである。ボラティリティ変動にこうした非対称性があるかどうかは、GJRモデルでの推定値をみれば分かる。GJRモデルの推定値に有意な正の値が得られているかどうか、ポイントとなる。

まず、シカゴ市場についてもみると、いずれの場合においてもマイナスの値が得られていることがわかる。また、の推定値の標準誤差の値が大きく、この係数が有意に効いていないことが明らかである。東京市場については、の推定値はいずれの符号もとっているが、標準誤差が大きいため、係数は有意に効いていないことが明らかである。さらに、興味深いことは、表4と表5の比較から明らかなように、表4のGARCHモデルを用いた場合のほうが、多くの場合、表5のGJRモデルを用いた場合よりも、BICの大きさが小さいことがわかる。これは、日米の商品市場の日次収益率を対象とする分析においては、GARCHモデルのほうが、GJRモデルよりもパフォーマンスが優れていることを意味している。

表5 GJRモデルの実証結果

(Model 3) 平均 :  $r_t = p_0$   
 条件付き分散 :  $s_t^2 = w_0 + ae_{t-1}^2 + gD_{t-1}e_{t-1}^2 + bs_{t-1}^2$

(Model 4) 平均 :  $r_t = p_0 + p_1r_{t-1}$   
 条件付き分散 :  $s_t^2 = w_0 + ae_{t-1}^2 + gD_{t-1}e_{t-1}^2 + bs_{t-1}^2$

	シカゴ商品取引所				東京穀物商品取引所			
	大豆		とうもろこし		大豆		とうもろこし	
	Model 3	Model 4	Model 3	Model 4	Model 3	Model 4	Model 3	Model 4
$\pi_0$	0.011 (0.043)	0.017 (0.042)	0.029 (0.051)	0.028 (0.051)	0.039 (0.040)	0.038 (0.930)	0.051 (0.040)	0.045 (0.040)
$\pi_1$		0.022 (0.034)		0.066 (0.057)		0.084* (0.038)		0.130** (0.039)
$\omega_0$	0.051* (0.025)	0.051* (0.024)	0.040 (0.027)	0.039 (0.029)	0.066 (0.036)	0.069 (0.037)	0.063* (0.030)	0.063* (0.030)
$\alpha$	0.069* (0.027)	0.069* (0.027)	0.083 (0.055)	0.082 (0.054)	0.137** (0.048)	0.144* (0.051)	0.121** (0.032)	0.123** (0.033)
$\gamma$	-0.033 (0.030)	-0.032 (0.030)	-0.043 (0.050)	-0.040 (0.050)	-0.069 (0.044)	-0.076 (0.045)	0.016 (0.048)	0.023 (0.053)
$\beta$	0.922** (0.026)	0.922** (0.025)	-0.043** (0.016)	0.932** (0.015)	0.874** (0.043)	0.869** (0.045)	0.845** (0.039)	0.840** (0.040)
対数尤度	-1423.24	-1421.57	-1538.20	-1536.70	-1439.52	-1436.12	-1393.83	-1386.72
BIC	3.445	3.453	3.720	3.729	3.484	3.488	3.375	3.370
JB	117.497	114.795	6114.239	6396.478	328.080	324.366	41.630	42.917
P-value	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

注) \*\*は係数が有意水準1%で有意であることを示している。  
 \*は係数が有意水準5%で有意であることを示している。  
 JBは残差項の正規性を検定するためのJarque-Bera検定統計量。  
 P-valueはJarque-Bera検定統計量に基づく確率値。  
 ( )内の数字はHeteroskedasticity Consistent Standard Error。  
 BICはモデル選択に関するSchwarz基準である。

## 6. 結論

本稿では、1993年1月4日から1996年7月31日の日次データを対象として、日米の商品先物市場に関する収益率のボラティリティについて、実証的に比較検討を行った。その結果、いくつかの興味深い結果が得られた。

まず、GARCHモデルに関しては、日米ともに良好な実証結果を得ることができた。GARCH

モデルにとって重要なパラメーターは有意に効いており、ボラティリティ変動の持続性も確認できた。

次に、ボラティリティの非対称性を考慮に入れたGJRモデルに関しては、日米ともに、結果は芳しいものではなかった。非対称性を反映するパラメーターは有意に効いておらず、また、BICで比較すると、GJRモデルよりもGARCHモデルが選択されることも明らかとなった。

これらの結果は、日米に共通したものである。このように、日米の市場の比較という点に関しては、両者には同様の特性が見出されることが明らかとなった。

### 【参考文献】

- Bollerslev T., (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, Vol.31, pp.307-327.
- Bollerslev T., R.Y.Chou, and K.F.Kroner, (1992), "ARCH Modeling in Finance : A Review of the Theory and Empirical Evidence," *Journal of Econometrics*, Vol.52, pp.5-59.
- Bollerslev T., R.F.Engle, and D.B.Nelson, (1994), "ARCH Models," in R.F.Engle and D.M.McFadden eds., *The Handbook of Econometrics*, Vol.4, North-Holland
- Dickey D.A. and W.A.Fuller (1979), "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root," *Journal of the American Statistical Association*, Vol.74, pp.427-431.
- Dickey D.A. and W.A.Fuller (1981), "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Econometrica*, Vol.49, pp.1057-1072.
- Engle R.F., (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, Vol.50, pp.987-1008.
- Glosten L.R., R.Jagannathan and D.Runkle, (1993), "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks", *Journal of Finance*, Vol.48, pp.1779-1801.
- Nelson D.B., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns," *Econometrica*, Vol. 59, pp.347-370.
- Phillips P.C.B. and P.Perron, (1988), "Testing for a Unit Root in Time Series Analysis," *Biometrika*, Vol.75, pp.335-346.
- Shephard N., (1996), "Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility," in D. R.Cox, D.V.Hinkley and O.E.Barndorff-Nielsen eds., *Time Series Models in Econometrics, Finance, and Other Fields*, Chapman & Hall.
- 三和総合研究所 『国際先物穀物指数に関する調査報告』(1997)
- 渡部敏明 『日本の株式市場におけるボラティリティの変動』(三菱総合研究所、1997)